

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE SOCIAIS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Modelo *Real Business Cycle* (RBC):  
Propriedades e Aplicações

Autor: Danyele Gorges Castanha  
Orientador: Prof. Armando Vaz Sampaio

Curitiba - PR  
Dezembro / 2017

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Danyele Gorges Castanha

Modelo *Real Business Cycle* (RBC): Propriedades e  
Aplicações

Curitiba - PR

2017

DANYELE GORGES CASTANHA

MODELO *REAL BUSINESS CYCLE* (RBC): PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Economia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. ARMANDO VAZ SAMPAIO

Curitiba - PR

2017

DANYELE GORGES CASTANHA

MODELO *REAL BUSINESS CYCLE* (RBC): PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada  
ao Curso de Graduação  
em Ciências Econômicas da  
Universidade Federal do Paraná, como  
requisito parcial para obtenção do Grau  
de Bacharel. Área de Concentração:  
Economia.

Aprovada em DEZEMBRO de 2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. ARMANDO VAZ SAMPAIO - Orientador  
UFPR

---

Prof. Dr. FERNANDO MOTTA CORREIA  
UFPR

---

Prof. Dr. MAURICIO VAZ LOBO BITTENCOURT  
UFPR

Curitiba-PR  
2017

# Lista de Figuras

2.1	Salário x Horas de Lazer . . . . .	11
3.1	Diagrama de Fase do Modelo Uni-Elastico . . . . .	18
3.2	Diagrama do Equilíbrio no Mercado de Trabalho . . . . .	19
3.3	Linhas de Fluxo do Diagrama de Fase do Modelo Uni-Elastico . . . . .	25
4.1	Efeitos da Política Fiscal no Diagrama de Fase do Modelo Uni-Elastico . .	37
B.1	Modelo Uni-Elastico . . . . .	50

# Lista de Tabelas

3.1	O Modelo Unielástico . . . . .	18
B.1	O Modelo Unielástico . . . . .	48

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Extensão do Modelo de Ramsey</b>	<b>4</b>
2.1 Famílias . . . . .	6
2.2 Empresas . . . . .	12
2.3 Equilíbrio . . . . .	16
<b>3 O Modelo Uni-elástico</b>	<b>17</b>
3.1 Equilíbrio no Mercado de Capital . . . . .	19
3.2 Equilíbrio no Consumo . . . . .	22
3.3 Ponto Estacionário . . . . .	24
<b>4 Política Fiscal</b>	<b>27</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>39</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>42</b>
<b>A Função de utilidade unielástica</b>	<b>45</b>
<b>B Diagrama de Fase Modelo Iso-Elástico</b>	<b>48</b>

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar, detalhadamente e de maneira formal, o modelo *Real Business Cycle* (RBC) por meio de uma extensão do Modelo de Ramsey, e a implicação de um choque fiscal nesse sistema. Essa demonstração se deu através da exposição e resolução das equações do Modelo RBC considerando-o dentro de uma economia onde a variável de oferta de trabalho das famílias era endógena, construindo um simples sistema dinâmico englobando as famílias e empresas representativas em um mercado em equilíbrio, e considerando um caso especial do modelo onde a elasticidade de substituição é unitária. Através dessa demonstração é possível verificar que um choque fiscal positivo levará a um novo estado estacionário de equilíbrio que se situa abaixo do estado estacionário inicial.

Palavras-chave: Modelo RBC. Oferta de trabalho endógena. Política fiscal.



# Abstract

The aim of this study is to demonstrate, in a detailed and formal way, the Real Business Cycle Model through an extension of the Ramsey Model, and the implication of a fiscal shock in this system. This demonstration is achieved through the exposition and solution of the RBC Model's equations considering it within an economy where the variable of labor supply decisions of households was endogenous, building a simple dynamic system embracing representative families and firms in an equilibrium market, and considering a special case of the model where the elasticity of substitution is unitary. Through this analysis, it's possible to verify that a positive fiscal shock will lead to a new steady state of equilibrium that's below the initial steady state.

Keywords: RBC Model. Endogenous labor supply decisions. Fiscal policy.

# Capítulo 1

## Introdução

Qualquer teoria econômica é construída de uma forma onde as inter-relações sejam menos complexas para a melhor compreensão, ou seja, a teoria econômica é, por sua própria natureza, basicamente uma abstração do mundo real, onde se resume os principais pontos do sistema para responder relações relevantes dos problemas encontrados (CHIANG, 2005). De acordo com Samuelson (1952), a formalização matemática surge na economia como uma forma de fornecer às análises uma forma mais precisa para expor as teorias e pensamentos que dela se derivam.

”It happens to be empirically true that if you examine the training and background of all the past great economic theorists, a surprisingly high percentage had, or acquired, at least an intermediate mathematical training. [...] Moreover, without mathematics you run grave psychological risks.” (SAMUELSON, p. 56, 1952)

Apesar de ser apenas uma ferramenta, os métodos básicos da matemática se tornaram indispensáveis em vários aspectos da literatura econômica corrente. Segundo Chiang (2005), a linguagem dos símbolos, como ocorre com as equações matemáticas, se tornam mais favoráveis à concisão e à precisão, e são assim, mais fáceis de serem compreendidas por estarem baseadas no raciocínio dedutivo. Modelos econômicos tem como finalidade identificar particularidades da realidade e estudar suas consequências isoladas e um caminho para alcançar esses pontos é através da formalização matemática (ROMER, 2001).

O Modelo RBC é parte do programa de pesquisa macroeconômica neoclássica. Os defensores desse modelo promovem esses estudos, baseados na suposição que os mesmos proporcionam fundamentos microeconômicos avançados que embasariam as pesquisas sobre o sistema econômico dinâmico (KING, 1999).

”The claim for providing microfoundations is largely based on the fact that new classical models in general, and real business cycle models in particular, model the representative agent as solving a single dynamic optimization problem on behalf of all the consumers, workers, and firms in the economy. However, the claim that representative agent models are innately superior to other sorts of models is unfounded. There is no a priori reason to accord real business cycle models a presumption of accuracy because they look like they are based on microeconomics. Rather, there are several reasons to be theoretically skeptical of such models.” (HARTLEY ET AL., p. 11, 1998)

O modelo RBC se afasta das preocupações tradicionais de crescimento econômico, pois não fornecem nenhuma análise da taxa de crescimento em estado estacionário e transformam todos os fatores que a determinam como dados exógenos. Em vez disso, o foco está nos desvios do estado estacionário, como acontece quando ocorre um choque na política fiscal.

Para os pensadores clássicos, as forças de mercado tendem a se equilibrar na economia no pleno emprego, uma intervenção na economia, como no caso de uma política fiscal, é considerada ineficiente. Através da suposição da neutralidade da moeda, ou seja, como a moeda só depende única e exclusivamente da renda (serve apenas para fins transacionais), pode-se observar que a política fiscal não teria efeitos na economia.

É somente a partir das análises keynesianas, na década de 30, que a política fiscal começou a ser análise de estudos e pesquisas para modelos econômicos. Keynes (1936) recomendou que o aumento do gasto do governo seria capaz de impulsionar a produção e o emprego. Para as análises keynesianas um aumento do gasto do governo, expandiria a demanda efetiva, o investimento, o emprego e assim, o consumo.

Apesar de certas diferenças nos resultados finais, os modelos *Real Business Cycles* irão se basear na premissa que vários distúrbios que afetam a o ciclo de negócios são dados por variáveis macroeconômicas estudadas nos modelos keynesianos, como o nível de interferência governamental.

O objetivo desse estudo é analisar formalmente aspectos do Modelo *Real Business Cycle* (Modelo RBC) que ponderam sobre as questões das flutuações econômicas e modelar a economia em equilíbrio contínuo, assim como as consequências de políticas fiscais no modelo e identificar os possíveis canais de transmissão da política fiscal dentro desse

modelo proposto.

A avaliação do modelo analisado nesse estudo começa com as fundamentações microeconômicas sobre equilíbrio no mercado dinâmico onde estão compreendidas as famílias e firmas representativas. O modelo exposto é classificado como uma extensão do Modelo de Ramsey, pois se baseia em uma economia onde a oferta de trabalho das famílias é considerada endógena.

Primeiramente, o modelo em que se constitui o sistema é um mercado fechado, onde as famílias representativas procuram fazer decisões ótimas no presente e no futuro à respeito do consumo, da poupança, e da oferta de trabalho. Operam sob previsão perfeita de mercado, ou seja, os agentes são considerados racionais.

Todas as firmas representativas atuam em condição de um mercado perfeitamente competitivo e há retornos constantes de escala. O governo arrecada tributos dos produtos consumidos pelas famílias e também consome bens, o chamado consumo público, que irá ser analisado através de um choque nos gastos governamentais.

Logo depois da representação do modelo em equilíbrio dinâmico, por questões de facilidade na análise apresentada, é feita uma demonstração das propriedades teóricas de um caso especial do modelo exposto, na qual a elasticidade da oferta de trabalho é unitária. A partir dessa análise é construído um diagrama de fase do modelo uni-elástico onde analisa-se o ponto que se encontra a Regra de Ouro e o ponto de equilíbrio estacionário. Pretende-se dessa forma responder às seguintes questões: *de que forma o diagrama do modelo uni-elástico é construído? Como se comporta um ponto fora do ponto de equilíbrio estacionário observado no sistema? Como um choque nos gastos do governo irá alterar o mercado à longo e curto prazo, e o ponto de equilíbrio estacionário?*

Para atingir esses objetivos, o modelo é decomposto formal e detalhadamente, re-fazendo todas as equações necessárias e respeitando os aspectos fundamentais do método utilizado. Dessa forma, esse trabalho será dividido em três partes. A primeira parte tratará das deduções da extensão do Modelo de Ramsey, considerando endógena a oferta de trabalho e suas implicações para o mercado em equilíbrio, as famílias e as firmas representativas. Já no segundo capítulo será apresentado o caso especial onde a elasticidade da oferta de trabalho é unitária, e será exposto o diagrama de fase do modelo. No terceiro e último capítulo serão discutidas as implicações de uma política fiscal de aumento do gasto do governo para o modelo em questão.

## Capítulo 2

# Extensão do Modelo de Ramsey

O modelo *Real Business Cycle* tem como objetivo introduzir alguns aspectos do pensamento neoclássico no modelo de flutuações econômicas. Os modelos de crescimento equilibrado sofreram várias modificações e evoluções de pensamentos e análises durante os anos. O mais conhecido, que serve de bases para outras pesquisas e até mesmo várias críticas nessa área, é o modelo de Solow-Swan que apresenta a dinâmica no longo prazo de uma economia capitalista desenvolvida que se dirige ao estado de equilíbrio estacionário através da alocação de capital e trabalho, por intermédio de uma função de produção. Nesse modelo, o trabalho cresce a uma taxa natural e a poupança é exógena e constante.

Uma extensão da teoria de Solow é o modelo de Ramsey, que não rompe com a característica de exogeneidade do trabalho e do capital, mas destaca-se por transformar a taxa de poupança como endógena através da introdução de *infinite lived households*.<sup>1</sup> Pela análise do comportamento das famílias e das firmas no mercado competitivo, o modelo de Ramsey consegue estabelecer uma relação causal na determinação da dinâmica da economia agregada (WICKENS, 2008). Diferente do modelo de Solow, as decisões de consumo e poupança são feitas pelas famílias que querem maximizar sua utilidade no mercado competitivo. O modelo de Ramsey ignora todas as imperfeições do mercado, sendo proposto com uma economia fechada e sem uma estrutura definida em sua fórmula de análise.

Segundo King e Rebelo (1999), após sofrerem duras críticas com a Grande Depres-

---

<sup>1</sup>Expressão usada para designar famílias onde as gerações futuras demonstram aversão aos mesmos riscos que as gerações passadas; e o crescimento da população é zero, pois é suposto que a cada óbito de um indivíduo dessa população, haja um nascimento e vice-versa.

são em 1929, as análises microeconômicas perderam espaço nas escolas de pensamentos econômicos. Demorou mais de um século para que o interesse nos ciclos reais de negócios renascesse. Somente em meados de 1970, com os estudos de Robert Lucas que foram baseados em análises com expectativas racionais do agente econômico e, portanto, requeriam invariavelmente as análises de equilíbrio geral, é que os modelos de crescimento equilibrado ganharam espaço novamente. A partir do trabalho de Kydland e Prescott, em 1982, “*Time to Build and Aggregate Fluctuations*”, foi que o modelo *Real Business Cycle* começou a tomar forma. Kydland e Prescott não adotaram expectativas racionais em suas suposições e empenharam-se em comprovar que as perturbações nos ciclos de negócios se dariam em razão dos choques no nível tecnológico, e não mais no setor monetário, como fora definido por Lucas alguns anos antes.

O modelo *Real Business Cycle*, é uma extensão do modelo de Ramsey na medida em que introduz a oferta de trabalho das famílias como uma variável endógena. Considera que a dinâmica nas atividades econômicas agregadas, ou seja, os choques no ciclo de negócios são dados por variáveis reais na economia. Assim, em resposta a essas flutuações, indivíduos racionais alterariam suas decisões de oferta de trabalho e consumo. O ciclo de negócios seria a resposta natural às perturbações estocásticas na economia, as quais têm a sua origem não no equívoco sobre os preços dos produtos, ou na oferta e demanda de dinheiro dentro de uma economia, mas nas mudanças das quantidades agregadas.

O modelo também se diferencia da teoria de Solow, principalmente, ao não considerar o crescimento da população como sendo uma variável. Distância-se dos outros modelos de crescimento econômico ao considerar a economia no equilíbrio contínuo ao mesmo tempo em que tenta encontrar os impulsos que modelam as quantidades agregadas (HARTLEY, 1998). As famílias representativas no modelo *Real Business Cycle* tendem a maximizar suas expectativas fazendo escolhas ótimas de consumo e poupança tanto no presente, quanto no futuro. As empresas representativas operam maximizando o lucro, na medida em que contratam trabalho ofertado pelas famílias e produzem produto. Todos os agentes operam sob expectativas racionais e a competição é perfeita.

## 2.1 Famílias

O agente representativo procura maximizar seu próprio bem-estar tomando decisões ótimas dinamicamente em relação ao consumo e lazer no presente e no futuro. Como no modelo de Ramsey, as famílias são determinadas como sendo uma extensão das gerações passadas, onde suas preferências e sua aversão ao risco têm as mesmas restrições e aspectos. As famílias tendem a alocar seu tempo, integralmente, entre consumo e lazer, e tomam decisões ótimas sobre os bens consumidos visando a utilidade presente e a indefinida utilidade futura.

O agente possui uma dotação unitária que é alocada entre o trabalho e o lazer. O horizonte de planejamento é infinito e a utilidade ao longo da vida do agente no período "t",  $\Lambda(t)$ , é dada por uma integral da utilidade presente e futura.

A função utilidade ao longo da vida do consumidor é representada abaixo segundo Heijdra et al. (2002), Campbell (1994) e King e Rebelo (1999).

$$\Lambda(t) = \int_t^\infty \Phi(\tau) e^{\rho(t-\tau)} d\tau \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  representa a taxa de preferência temporal pura ( $\rho > 0$ ), e  $\Phi(\tau)$  representa a utilidade instantânea (felicidade) no período  $\tau$ .

Vamos assumir que a função utilidade tenha a seguinte forma:

$$\Phi(\tau) \equiv \epsilon_C \ln(C(\tau)) + (1 - \epsilon_C) \left[ \frac{(1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma_L}} \right]; \quad \sigma_L > 0 \quad (2.2)$$

onde  $C(\tau)$  representa o consumo e  $(1 - L(\tau))$  representa lazer,  $\sigma_L$  representa a elasticidade de substituição, e  $\epsilon_C$  representa a participação do consumo na função utilidade.

Essa função de utilidade 2.2 é conveniente de ser utilizada porque envolve duas das maiores especificações usadas na literatura de RBC, onde são consideradas como casos especiais, (1) o lazer como o consumo, entram na função utilidade na forma logarítmica, por exemplo, quando  $\sigma_L = 1$  em 2.2; (2) o segundo caso especial é baseado na suposição que o lazer entra na função utilidade na forma linear, por exemplo,  $\sigma_L \rightarrow \infty$ , conforme visto no modelo de Ramsey, em Heijdra et al. (2002, cap. 14).

Caso 1:  $\sigma_L = 1$ , função de utilidade unielástica, que é resolvida detalhadamente no Apêndice A, aplicando a regra de L'Hopital segundo Heijdra et al. (2002, p. 404) temos:

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} \left[ \frac{(1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma_L}} \right] = \ln(1 - L(\tau)) \quad (2.3)$$

Portanto:  $\Phi(\tau) \equiv \epsilon_C \ln(C(\tau)) + (1 - \epsilon_C) \ln(1 - L(\tau))$

O orçamento dinâmico do agente é representado pela expressão abaixo:

$$\dot{A}(\tau) \equiv r(\tau)A(\tau) + W(\tau)L(\tau) - T(\tau) - C(\tau) \quad (2.4)$$

onde  $r(\tau)$  representa a taxa de juros,  $A(\tau)$  é o ativo financeiro real,  $W(\tau)$  é o salário real do agente,  $L(\tau)$  é a oferta de trabalho,  $T(\tau)$  é o imposto real,  $C(\tau)$  é o consumo de um bem homogêneo e  $\dot{A}(\tau) \equiv \frac{dA}{d\tau}$ , onde  $\tau$ , representa tempo.

A equação 2.4 informa que a renda proveniente do trabalho e dos ativos, pode ir para o consumo, para o governo na forma de impostos, ou para a poupança. O indivíduo não pode fazer empréstimo indefinidamente e nem deixar de fazer empréstimo, para respeitar a hipótese de "no-Ponzi-game" (NPG) conforme discutido em Heijdra e Ploeg (2002), e em Blanchard e Fisher (1989). A condição NPG busca maximizar a utilidade do indivíduo ao mesmo tempo que delimita seus empréstimos sem impor condições que demarcam limites para as dívidas temporárias que o indivíduo possa fazer ao longo de sua vida.

Para resolver esse problema dos empréstimos ilimitados, devemos integrar a função 2.4:

$$A(t) = \int_t^\infty [C(\tau) - W(\tau)L(\tau)]e^{-R(t,\tau)}d\tau + \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} A(\tau)e^{-R(t,\tau)} \right] \quad (2.5)$$

onde  $R(t, \tau) \equiv \int_t^\tau r(s)ds$  é o fator de desconto. O valor dentro do colchetes não pode nem ser positivo, nem negativo, pois só assim seguiria a condição de "no-Ponzi-game" já explicada acima. Por consequência o valor só pode ser zero, e se anular.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(\tau)e^{-R(t,\tau)} = 0 \quad (2.6)$$

Substituindo 2.6 em 2.5 temos:

$$A(t) = \int_t^\infty [C(\tau) - W(\tau)L(\tau)]e^{-R(t,\tau)}dt \quad (2.7)$$

Assim se obtém a restrição do orçamento intertemporal das famílias. Onde a parte esquerda da equação 2.5 é o valor dos ativos que o agente possui no período  $t$ , um valor negativo para esse termo refere-se às dívidas que o agente está acumulando. O valor do consumo subtraindo os impostos sobre o rendimento do trabalho é representado pelo termo no lado direito da equação 2.5. Sendo assim, indivíduo que está endividado no tempo  $t$ , precisa diminuir seu consumo no futuro para equilibrar a equação.

Os indivíduos também devem tomar decisões à respeito das escolha de produtos, oferta de trabalho e aquisição de ativos, de uma maneira que buscam maximizar 2.1 respeitando a identidade orçamentária 2.4 e a condição NPG, sendo dado o nível inicial de ativos. A restrição 2.4 também pode ser representada como:

$$\dot{A}(\tau) = r(\tau)A(\tau) + W(\tau)L(\tau) - T(\tau) - C(\tau) \quad (2.4)$$

$$\dot{A} = r(\tau)A(\tau) + W(\tau)L(\tau) + W(\tau) - W(\tau) - T(\tau) - C(\tau)$$

$$\dot{A} = r(\tau)A(\tau) + W(\tau) - T(\tau) - C(\tau) - W(\tau)(1 - L(\tau)) \quad (2.8)$$

O problema econômico dos indivíduos, no qual o mesmo precisa escolher montantes de consumo, lazer, oferta de trabalho e dívidas, pode ser representado pela função Hamiltoniana de Valor Corrente, segundo Heijdra et al. (2002) e Chiang (2005), apresentado abaixo:

$$\mathcal{H}_c \equiv \epsilon_C \ln(C(\tau)) + (1 - \epsilon_C) \left[ \frac{(1 - (L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1)}{1 - \frac{1}{\sigma_L}} \right] + \mu(\tau)[r(\tau)A(\tau) + W(\tau) - T(\tau) - C(\tau)W(\tau)(1 - L(\tau))] \quad (2.9)$$

Variáveis de controle:  $C(\tau)$  ;  $(1 - L(\tau))$ ;

Variáveis de estado:  $A(\tau)$ ;

Variáveis coestado (multiplicador dinâmico):  $\mu(\tau)$ .

Sendo que as variáveis de controle precisam ser escolhidas de modo a maximizar a Hamiltoniana de Valor Corrente ( $\mathcal{H}_c$ ) em todos os instantes. As variáveis de controle precisam ser escolhidas em qualquer instante do tempo  $t$  de modo que afetem o valor da variável estado, por meio de uma equação de movimento. A variável coestado representa o valor sombra da variável estado.

A lei do princípio máximo, que rege a ferramenta principal para resolver os problemas de controle ótimo, estipula que, por meio das equações de movimento da variável estado e da variável coestado, como  $A(\tau)$  e  $\mu(\tau)$  devem variar ao longo do tempo (CHIANG, 2005).

Como o tempo entra no fator de desconto,  $\mu \equiv \lambda e^{-\rho t}$  a Hamiltoniana na equação 2.9 precisa ser de Valor Corrente.

### Condições de Primeira Ordem (CPO):

As equações de movimento para as variáveis de controle são  $\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial C}$  e  $\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial (1-L(\tau))}$  e determinam o objetivo que é a maximização da Hamiltoniana de Valor Corrente, ou seja, a maximização da função utilidade, como respectivamente mostradas abaixo:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial C} = \frac{\epsilon_C}{C(\tau)} - \mu(\tau) = 0$$

$$\frac{\epsilon_C}{C(\tau)} = \mu(\tau) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial (1-L(\tau))} = (1 - \epsilon_C)[1 - L(\tau)]^{\frac{-1}{\sigma_L}} - \mu(\tau)W(\tau) = 0$$

$$\frac{1 - \epsilon_C}{(1 - L(\tau))^{\frac{1}{\sigma_L}}} = \mu(\tau)W(\tau) \quad (2.11)$$

$\dot{A} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mu(\tau)}$  é a equação de movimento da variável estado,  $A(\tau)$ . Segundo Chiang (2005), essa equação tem como objetivo proporcionar o mecanismo pelo qual a escolha que fizemos no valor da variável de controle, nesse caso sendo  $C(\tau)$  e  $(1 - L(\tau))$ , possa ser refletida para um padrão específico de movimento para a variável de estado  $A(\tau)$ .

$$\dot{A} = r(\tau)A(\tau) + W(\tau) - T(\tau) - C(\tau) - W(\tau)(1 - L(\tau)) \quad (2.12)$$

$\dot{\mu}(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A(\tau)} + \rho\mu(\tau)$  equação de movimento da variável coestado  $\mu(\tau)$ .

$$\dot{\mu}(\tau) = -\mu(\tau)r(\tau) + \rho\mu(\tau)$$

$$\dot{\mu} = \mu(\tau)(-r(\tau) + \rho(\tau))$$

$$\frac{\dot{\mu}(\tau)}{\mu(\tau)} = \rho - r(\tau) \quad (2.13)$$

Substituindo 2.10 em 2.11 teremos as outras equações de primeira ordem:

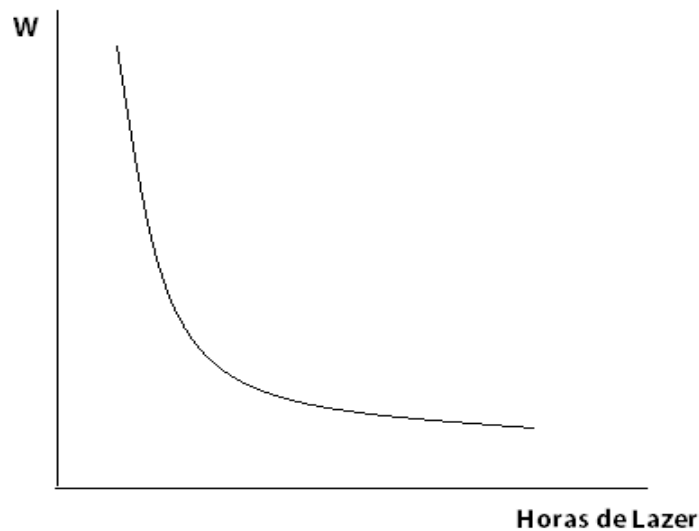
$$\frac{1 - \epsilon_C}{(1 - L(\tau))^{\frac{1}{\sigma_L}}} = \frac{\epsilon_C}{C(\tau)}W(\tau)$$

$$\frac{C(\tau)}{(1 - L(\tau))^{\frac{1}{\sigma_L}}} \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) = W(\tau) \quad (2.14)$$

De acordo com Heijdra et al. (2002), essa equação define uma decisão estática de que a taxa marginal de substituição entre lazer e consumo precisa ser igual que a taxa salarial  $W(\tau)$ .

A função de restrição do indivíduo para o recebimento do seu salário é uma equação entre horas de trabalho ( $H$ ) e horas de lazer ( $L$ ) que corresponde ao total de horas do dia:  $H + L = 24$ . Nesse caso, quanto maior for as horas de lazer desse indivíduo, menor será seu salário e o contrário acontece quando analisamos horas de trabalho e salário. Portanto, tendo no eixo das ordenadas o salário e no eixo da abscissa o lazer, o gráfico da restrição teria uma inclinação negativa. A relação pode ser observada na Figura 2.1, abaixo:

Figura 2.1: Salário x Horas de Lazer



Nota: Elaboração Própria

Diferenciando a equação 2.10, teremos a seguinte relação entre consumo e a participação do mesmo na função utilidade:

$$\mu(\tau) = \epsilon_C C(\tau)^{-1}$$

$$\frac{d\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{d\mu(\tau)}{dC(\tau)} \frac{dC(\tau)}{d\tau}$$

$$\dot{\mu} = -\epsilon_C C(\tau)^{-2} C(\tau) \quad (2.15)$$

Substituindo 2.10 e 2.15 em 2.13, obtemos:

$$\frac{-\epsilon_C C(\tau)^{-2} \dot{C}(\tau)}{\epsilon_C(\tau)^{-1}} = \rho - r(\tau)$$

$$-\frac{\dot{C}(\tau)}{C(\tau)} = \rho - r(\tau)$$

$$\frac{\dot{C}(\tau)}{C(\tau)} = r(\tau) - \rho \quad (2.16)$$

A equação 2.16 representa uma equação oriunda das Condições de Primeira Ordem caracterizada por ser uma equação de consumo de Euler, onde representa que a taxa marginal de custo e a taxa marginal de benefício são iguais no presente e no futuro. Nesse caso, um aumento da taxa de juros reais  $r(\tau)$  é caracterizado por uma diminuição na taxa pura de preferéncia temporal  $\rho$ . O agente vai escolher a melhor alternativa para que seu consumo seja ótimo no tempo.

## 2.2 Empresas

Nessa seção examinaremos o comportamento dos produtores, analisando o lado da oferta de produtos. As firmas estão em um mercado em que ocorre a competição perfeita, ou seja, as empresas que estão inseridas no sistema não influenciam o preço de mercado dos produtos, ocorre a livre saída e entrada de empresas no setor, e o produto é um bem homogêneo, onde a função de produção analisa o efeito da mudança simultânea dos fatores de produção capital ( $K$ ) e trabalho ( $L$ ).

Há rendimentos constantes de escala, ou seja, uma variação dos fatores de produção  $K$  e  $L$  faz com que ocorra um aumento, exatamente proporcional, sobre a produção. Desse modo não há necessidade de diferenciar as firmas entre si. O processo de decisão do produtor envolve três componentes essenciais: a organização da produção do produto, a minimização de custos e a maximização do lucro.

A função de produção segue o modelo de Cobb-Douglas:

$$Y(\tau) = F(K(\tau), L(\tau)) = Z_0 L(\tau)^{\epsilon_L} K(\tau)^{1-\epsilon_L} \quad (2.17)$$

onde  $Z_0$  pode ser considerado como sendo o parâmetro de eficiência, ou seja, uma taxa da produtividade geral, já que a grandeza dessa variável afetará proporcionalmente o nível de produção  $Y(\tau)$ . Como  $(\epsilon_L) + (1 - \epsilon_L) = 1$  a função é linearmente homogênea e suas isoquantas têm inclinações decrescentes em toda a sua extensão e são convexas para valores positivos de  $K(\tau)$  e  $L(\tau)$  (CHIANG, 2005). O expoente  $\epsilon_L$  indica a participação relativa do trabalho no produto final e o expoente  $(1 - \epsilon_L)$  indica a participação relativa do produto final originada do capital.

O Valor da Empresa ao longo do tempo, é representado pelo lucro, que é igual a receita da empresa,  $Y(\tau)$ , menos os custos, que nesse caso são definidos pelo valor da multiplicação entre o salário e o trabalho efetivamente empregado ( $W(\tau)L(\tau)$ ), e menos o gasto em investimento ao longo do tempo, ou seja, o valor descontado dos fluxos de caixa:

$$V(t) = \int_t^\infty [Y(\tau) - W(\tau)L(\tau) - I(\tau)]e^{R(t,\tau)}d\tau \quad (2.18)$$

onde,  $R(t, \tau)$ , representa a taxa de desconto,  $R(t, \tau) \equiv \int_t^\tau r(s)ds$ , e  $\frac{R(t,\tau)}{d\tau} \equiv r(\tau)$ , sendo  $r(\tau)$  a taxa de juros reais (representando o preço do capital, ou seja, o retorno financeiro que poderia ter sido ganho se esses recursos houvessem sido aplicados de forma diferente) e  $I(\tau)$  é o investimento bruto. Abaixo é apresentado o processo de acúmulo de capital:

$$\dot{K}(\tau) = I(\tau) - \delta K(\tau) \quad (2.19)$$

onde  $\delta$ , representa a depreciação do capital. A empresa busca maximizar o seu valor ao longo do tempo, como representado na equação 2.18, respeitando a restrição de capital da equação explícita em 2.19. A firma então buscará maximizar a expressão:

$$V(t) = \int_t^\infty [Y(\tau) - W(\tau)L(\tau) - (\dot{K}(\tau) + \delta K(\tau))]e^{R(t,\tau)}d\tau \quad (2.20)$$

Para isso, é preciso eliminar  $\dot{K}(\tau)$  da expressão 2.20. Devemos adotar o seguinte procedimento:

$$V(\tau) = \int_t^\infty \left[ Y(\tau) - W(\tau)L(\tau) - (\dot{K}(\tau) + \delta K(\tau)) \right] e^{-R(t,\tau)} d\tau$$

$$V(t) = \int_t^\infty \left[ Y(\tau) - W(\tau)L(\tau) - r(\tau)K(\tau) + r(\tau)K(\tau) - (\dot{K}(\tau) + \delta K(\tau)) \right] e^{-R(t,\tau)} d\tau$$

$$V(t) = \int_t^\infty \left[ Y(\tau) - W(\tau)L(\tau) - \dot{K}(\tau) - r(\tau)K(\tau) - (r(\tau) + \delta)K(\tau) \right] e^{-R(t,\tau)} d\tau$$

$$\text{onde } \int_t^\infty \left[ \dot{K}(\tau) - r(\tau)K(\tau) \right] e^{-R(t,\tau)} d\tau = \left[ K(\tau)e^{-R(t,\tau)} \right]_0^\infty = -K(t)$$

Portanto:

$$V(t) = K(t) + \int_t^\infty [Y(\tau) - W(\tau)L(\tau) - (r(\tau) + \delta)K(\tau)] e^{-R(t,\tau)} d\tau \quad (2.21)$$

onde  $K(t)$  representa o estoque de capital do período  $t$ . Quando  $t = 0$ ,  $K(0)$  representa o estoque de capital inicial.

Assumimos que não há custo de ajuste do investimento, dessa forma a decisão da empresa é essencialmente estático, onde a CPO representa a igualdade entre a receita marginal e o custo marginal. A firma pode variar seu capital social à vontade, mas o valor do capital ( $K$ ) e do trabalho ( $L$ ) que a firma decide empregar ao longo do tempo é estático. Podemos então encontrar as Condições de Primeira Ordem para a otimização da função objetivo representada em 2.21:

**CPO:**

$$\frac{\partial V(t)}{\partial L(\tau)} = 0 \quad \frac{\partial V(t)}{\partial K(\tau)} = 0 \quad (2.22)$$

A derivada parcial do produto em relação à parcial da oferta de trabalho é igual ao salário. Assim como é exposto na equação abaixo:

$$\frac{\partial Y(\tau)}{\partial L(\tau)} = W(\tau) \quad (2.23)$$

$$W(\tau) = \epsilon_L Z_0 L(\tau)^{\epsilon_L - 1} K(\tau)^{1 - \epsilon_L}$$

$$W(\tau) = \epsilon_L Z_0 L(\tau)^{\epsilon_L} L^{-1} K(\tau)^{1 - \epsilon_L}$$

$$W(\tau) = \epsilon_L \frac{Z_0 L(\tau)^{\epsilon_L} K(\tau)^{1 - \epsilon_L}}{L(\tau)}$$

$$W(\tau) = \epsilon_L \frac{Y(\tau)}{L(\tau)} \quad (2.24)$$

A função 2.24 informa que há uma relação negativa entre salário e demanda de força de trabalho pela firma. A medida que o custo de remuneração aumenta, a firma irá limitar o seu uso de trabalho.

A derivada parcial do produto em relação à parcial do estoque de capital é igual a soma do juros com a depreciação do capital. Assim como é exposto na equação abaixo:

$$\frac{\partial Y(\tau)}{\partial K(\tau)} = r(\tau) + \delta \quad (2.25)$$

$$r(\tau) + \delta = (1 - \epsilon_L) Z_0 L(\tau)^{\epsilon_L} K(\tau)^{-\epsilon_L}$$

$$r(\tau) + \delta = (1 - \epsilon_L) Z_0 L(\tau)^{\epsilon_L} K(\tau)^{-\epsilon_L} \left( \frac{K(\tau)}{K(\tau)} \right)$$

$$r(\tau) + \delta = (1 - \epsilon_L) \frac{Z_0 L(\tau)^{\epsilon_L} K(\tau)^{1 - \epsilon_L}}{K(\tau)}$$

$$r(\tau) + \delta = (1 - \epsilon_L) \frac{Y(\tau)}{K(\tau)} \quad (2.26)$$

A equação 2.26 informa que  $r(\tau) + \delta$  representa os custos reais por unidade de capital.



## 2.3 Equilíbrio

O produto  $Y(\tau)$  pode ser usado para o consumo privado  $C(\tau)$ , para o consumo público  $G(\tau)$  ou para o investimento  $I(\tau)$ . Como se trata de uma economia fechada, exportações e transferências líquidas para o exterior serão omitidas do modelo.

Portanto, a condição de equilíbrio para o modelo de produto é:

$$Y(\tau) = C(\tau) + I(\tau) + G(\tau) \quad (2.27)$$

Adotando que a fonte de recursos do governo seja apenas a captação de impostos, a restrição orçamentária do governo será:

$$G(\tau) = T(\tau) \quad (2.28)$$

## Capítulo 3

### O Modelo Uni-elástico

Para construir o modelo dinâmico de economia fechada é necessário se basear na mesma suposição de Baxter e King (1993) e King e Rebelo (1999), que a elasticidade de substituição da oferta de trabalho é unitária ( $\sigma_L = 1$ ), pois há algumas aderências simplificadas com os dados e torna a análise mais acessível e, portanto, mais fácil de ser analisada.

Lembrando, como já foi visto quando resolvemos a equação 2.3, a forma funcional da função utilidade será uma função de Cobb-Douglas como demonstrada abaixo:

$$U(\tau) = \epsilon_C \ln(C(\tau)) + (1 - \epsilon_C) \ln(1 - L(\tau)) \quad (3.1)$$

Para a formação do modelo unielástico usa-se as equação de demanda e oferta de trabalho, a equação de consumo de Euler, a equação do processo de acúmulo de capital, a função de produção de Cobb-Douglas, a equação simplificada da condição de equilíbrio do produto, a equação de custos por unidade de capital e a restrição orçamentária do governo. Sendo que é preciso considerar a participação do gasto do governo no produto nacional como sendo constante ao longo do tempo, ou seja,  $\omega_G \equiv \frac{C}{Y}$ .

O objetivo na resolução do modelo será relacionar o locus de equilíbrio no mercado de trabalho, o chamado "*Labor Market Equilibrium*" (LME), o locus de equilíbrio do mercado de capital, "*Capital Stock Equilibrium*" (CSE) e o equilíbrio do consumo (*Consumption Equilibrium* - CE).

Tabela 3.1: O Modelo Unielástico

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad (\text{T1.11})$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = r(t) - \rho \quad (\text{T1.2})$$

$$G(t) = T(t) \quad (\text{T1.3})$$

$$W(t) = \epsilon_L \left( \frac{Y(t)}{L(t)} \right) \quad (\text{T1.4})$$

$$r(t) + \delta = (1 - \epsilon_L) \left( \frac{Y(t)}{K(t)} \right) \quad (\text{T1.5})$$

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) \quad (\text{T1.6})$$

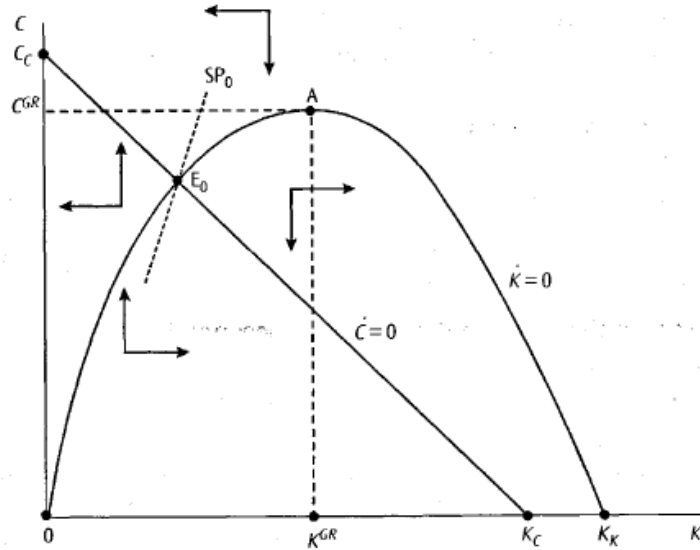
$$W(t)(1 - L(\tau)) = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C(t) \quad (\text{T1.7})$$

$$Y(t) = Z_0 L(t)^{\epsilon_L} K(t)^{1 - \epsilon_L} \quad (\text{T1.8})$$

O modelo unielástico pode ser resumido como exposto na Tabela 3.1 e é detalhadamente derivado no apêndice B.

O modelo resumido na Tabela 3.1, busca determinar a combinação ótima entre  $C(t)$  e  $K(t)$  ao longo do tempo. Para encontrar esse ponto é preciso respeitar simultaneamente duas isóclinas:  $\dot{K} = 0$  e  $\dot{C} = 0$ , como exemplificadas na Figura 3.1:

Figura 3.1: Diagrama de Fase do Modelo Uni-Elástico



Fonte: Heijdra e Van Der Ploeg, 2002

### 3.1 Equilíbrio no Mercado de Capital

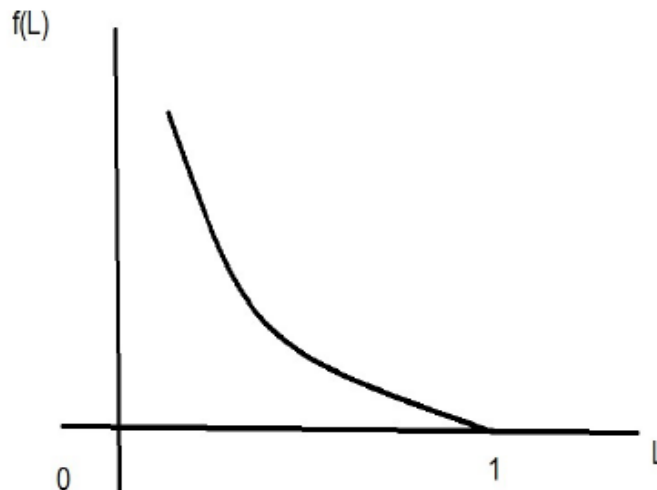
De acordo com Heijdra et al. (2002), a curva  $\dot{K} = 0$  representa combinações de  $(C, K)$  onde o investimento líquido é zero e para cada ponto existe um único nível de equilíbrio de emprego. A curva é construída relacionando trabalho, capital e o consumo. A inferência qualitativa final na construção do diagrama de fase, demonstrado na Figura 3.1, é determinar a direção do movimento das variáveis de trabalho, consumo e capital ao longo do tempo (CHIANG, 2005).

Usando as equações de demanda de trabalho (T1.4), oferta de trabalho (T1.7) e a função de produção (T1.8) é possível relacionar o equilíbrio no mercado de trabalho ao consumo e ao capital pela função abaixo:

$$LME : (f(L) \equiv) (1 - L)L^{\epsilon-1} = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C \epsilon_L Z_0} \right) C K^{-(1-\epsilon_L)} \quad (3.2)$$

onde a curva tem uma inclinação decrescente  $f'(L) < 0$  e é convexa em relação à origem  $f''(L) > 0$ , no seguinte intervalo economicamente viável:  $L \in [0, 1]$ , como mostra a Figura 3.2:

Figura 3.2: Diagrama do Equilíbrio no Mercado de Trabalho



Fonte: Heijdra e Van Der Ploeg, 2002

O locus de equilíbrio no mercado de capital (CME) é obtido relacionando a oferta de trabalho (T1.7) e a demanda de trabalho (T1.4) com a premissa, que precisa ser

sustentada, de que  $\dot{K} = 0$ .

$$\delta K = \left[ 1 - \omega_G - \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{1 - L}{L} \right) \right] Y \quad (3.3)$$

Como existe um limite inferior para o emprego, pois o valor do produto e do capital só podem ser positivos, a expressão dentro do colchetes deve ser maior ou igual a zero, a equação 3.3 pode ser escrita como:

$$CSE : \quad K^{\epsilon_L} = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}{\delta(1 - \epsilon_C)} \right) \left( \frac{L - L_{min}}{L_{min}} \right) L^{\epsilon_L - 1} \quad \text{onde } 0 < L_{min} < 1 \quad (3.4)$$

A equação 3.4 representa a função implícita  $L = g(K)$ , no intervalo  $L \in [L_{min}, 1]$ . Inserindo essa função implícita na equação contendo o consumo como um variável, temos:

$$C = (1 - \omega_G) Z_0 g(K)^{\epsilon_L} K^{1 - \epsilon_L} - \delta K \quad (3.5)$$

Se o trabalho cresce de  $L_{min}$  para  $L = 1$  então podemos afirmar que existirá também um valor de capital e de consumo para a combinação desses pontos na curva. Nesse caso a partir das equações 3.2 e 3.4, temos a seguinte possibilidade de combinação:  $(C, K, L) = (0, 0, L_{min})$  ou  $(C, K, L) = (0, K_K, L_{max}) = (0, K_K, 1)$ , como é pontuado na Figura 3.1.

Derivando a equação 3.5, teremos:

$$\left( \frac{dC}{dK} \right)_{\dot{K}=0} = (1 - \omega_G) Z_0 [1 - \epsilon_L (1 - \eta_g(K))] \left( \frac{g(K)}{K} \right)^{\epsilon_L} - \delta \quad (3.6)$$

Pode-se notar pela expressão de inclinação encontrada em 3.6, que os pontos perto da origem são caracterizados por terem níveis de emprego baixos, pois quando a oferta de trabalho é considerada exógena ( $\eta_g = 0$ ) o termo dentro das chaves tende a  $(1 - \epsilon_L)$  a medida que  $K \rightarrow 0$ . Entretanto, como  $\lim_{K \rightarrow 0} g(K)/K = +\infty$  a linha CSE é mais

inclinada quão mais próxima à origem for. Os pontos perto do intercepto horizontal ( $K_K$ ) são caracterizados por apresentar níveis de emprego mais próximos ao seu limite unitário (HEIJDRÁ ET AL., p. 482, 2002).

A dinâmica do capital pode ser calculada a partir de (T1.1) juntamente com (T1.6), que é a equação da condição de equilíbrio do mercado, (T1.8) que se refere a função de produção, e a função implícita  $L = g(K)$ . Portanto, temos que:

$$\dot{K} = (1 - \omega_G)Z_0g(K)^{\epsilon_L}K^{1-\epsilon_L} - \delta K - C \quad (3.7)$$

onde teremos uma derivada parcial negativa  $\left(\frac{\partial \dot{K}}{\partial C}\right) = -1 < 0$ , agora podemos determinar a direção das flechas das regiões da isóclina  $\dot{K} = 0$ , no espaço  $(C, K)$ , como representado na Figura 3.1.

A medida que  $C$  aumenta  $\dot{K}$  diminui, por isso, conforme passamos de oeste para leste no espaço de fase, como indica a Figura 3.1, podemos observar que  $K$  decresce constantemente, de modo que o sinal de  $\dot{K}$  deve passar por três estágios de ordem  $(-, 0, +)$ . Assim, em qualquer ponto acima da curva  $\dot{K}$  terá um sinal negativo e pontos abaixo da curva o sinal de  $\dot{K}$  será positivo.

A "Regra de Ouro" (*Golden-Rule Point*), definida no modelo de Solow como sendo a taxa de poupança que conduz à um estado estacionário que maximiza o consumo por unidade de trabalho, aqui pode ser definida quando  $\frac{dC}{dK} = 0$ , na equação 3.6:

$$(1 - \omega_G)[1 - \epsilon_L(1 - \eta_g(K^{GR}))]\left(\frac{Y^{GR}}{K^{GR}}\right) = \delta \quad (3.8)$$

onde  $Y^{GR}$  é dado por:

$$Y^{GR} = Z_0[gK^{GR}]^{\epsilon_L}[K^{GR}]^{1-\epsilon_L} \quad (3.9)$$

A Regra de Ouro ocorre no ponto A da Figura 3.1, onde o consumo é máximo para uma determinada quantidade de capital. Para pontos à direita da Regra de Ouro, a curva CSE terá inclinação negativa.

Isso implica que, quando ocorre uma situação em que a oferta de trabalho é considerada exógena, onde aqui pode ser representada como sendo  $\eta_g(K) = 0$  para todo  $K$ , a fórmula para  $K^{GR}$  pode ser representada pela seguinte expressão:

$$(1 - \omega_G)(1 - \epsilon_L) \left( \frac{Y^{GR}}{K^{GR}} \right) = \delta \quad (3.10)$$

Portanto, podemos argumentar que a Regra de Ouro assume que o objetivo do agente econômico na economia é maximizar o consumo ou a utilidade que dele se deriva. A diferença desse ponto A com o ponto de equilíbrio (ponto estacionário), que veremos mais adiante, é que aplicando a Regra de Ouro o estoque de capital precisa ser constante ( $K^{GR}$ ), pois não é sustentável um choque negativo do produto (WICKENS, p. 14, 2008).

## 3.2 Equilíbrio no Consumo

A curva  $\dot{C} = 0$  representa combinações de pontos  $(C, K)$  onde cada consumo é constante no tempo. Usando (T1.2) da Tabela 3.1, podemos escrever a linha de equilíbrio do consumo (CE) como sendo:

$$CE : \quad y \equiv \frac{Y}{K} = Z_0 \left( \frac{K}{L} \right)^{-\epsilon_L} = y^* \quad (3.11)$$

onde  $y^* = \frac{(\rho + \delta)}{(1 - \epsilon_L)}$  representa a razão produto capital no equilíbrio na qual a taxa de juros é igual a taxa de preferência temporal ( $r = \rho$ ). Podemos distinguir essa expressão pela equação (T1.5):

$$r + \delta = (1 - \epsilon_L) \left( \frac{Y}{K} \right) \quad (3.12)$$

Considerando que o juros reais dependem do produto marginal do capital e um dos elementos de funcionalidade do sistema se baseia no fato que ocorre retornos constantes de escala na ótica da firma, então podemos inferir que o equilíbrio no consumo geraria uma razão constante entre capital e trabalho e, portanto, um único valor para salários ( $W(t)$ ) e uma razão constante entre produto e capital.

Sendo todas as demais variáveis constantes, pela expressão (T1.7), podemos assumir que a taxa entre capital e oferta de trabalho também é única.

$$W(t)(1 - L(t)) = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C(t)$$

A partir da equação 3.11 podemos observar que o consumo no equilíbrio é relacionado com uma única razão capital-trabalho como:

$$\left( \frac{K}{L} \right)^* \equiv \left( \frac{Z_0}{y^*} \right)^{\frac{1}{\epsilon_L}} \quad (3.13)$$

Substituindo essa razão na equação 3.2, obtemos a expressão para a linha CE no plano de coordenadas (C, K):

$$C = y^* \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \left( \frac{Z_0}{y^*} \right)^{\frac{1}{\epsilon_L}} - K \right) \quad (3.14)$$

Através da equação 3.14 podemos inferir que a linha CE é linear com inclinação negativa,  $\frac{\partial C}{\partial K} = -1 < 0$ , e passa pelas coordenadas  $(C, K) = (0, K_C)$  e  $(C, K) = (C_C, 0)$  como pode ser observado na Figura 3.1.

A dinâmica do consumo pode ser deduzida notando que a equação de consumo de Euler (T1.2) pode ser reconstruída como:

$$\frac{\dot{C}}{C} = (1 - \epsilon_L)[y - y^*] \quad (3.15)$$



onde  $y^*$  é definido pela expressão  $y^* \equiv \frac{\rho+\delta}{1-\epsilon_L} \equiv \frac{r+\delta}{1-\epsilon_L}$ . Pela equação (3.11) temos:

$$\frac{\partial y}{\partial C} = \epsilon_L Z_0 \left( \frac{K}{L} \right) \left( \frac{K}{L^2} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial C} \right) < 0 \quad (3.16)$$

onde 3.2 mostra que  $\frac{\partial L}{\partial C} < 0$ . Segue que  $\partial[\dot{C}/C]/\partial = (1 - \epsilon_L)\partial y/\partial C < 0$ . Essas expressões foram indicadas pelas flechas verticais na Figura 3.2.

Com tudo o mais constante, um aumento do consumo diminui a oferta de trabalho e, portanto, o equilíbrio no mercado de trabalho. Como o consumo é negativo em relação à razão produto-capital e à taxa de juros real do mercado, um aumento do consumo também diminuirá as duas variáveis. Dessa maneira, o consumo irá cair se o ponto estiver localizado acima da reta  $\dot{C} = 0$  e o contrário também é verdadeiro.

A medida que  $C$  aumenta  $L$  sofre uma redução constante, a direção das flechas horizontais indicam esse movimento.

### 3.3 Ponto Estacionário

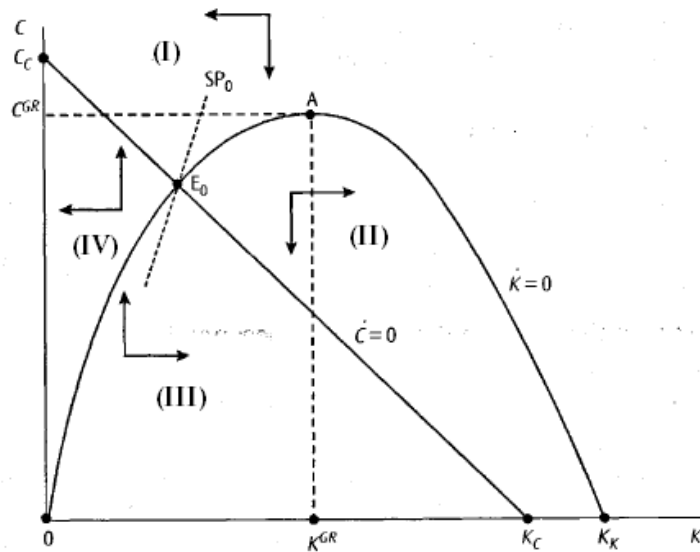
Podemos notar que a curva CSE (*Capital Stock Equilibrium*) e a reta CE (*Consumption Equilibrium*), já equacionadas nas seções anteriores, se interceptam apenas no ponto  $E_0$ .

A partir da configuração das linhas de fluxo<sup>1</sup>, que tem o propósito de visualizar o movimento dinâmico do sistema a partir de qualquer ponto inicial, é possível denotar que as mesmas circundam um determinado equilíbrio intertemporal (CHIANG, 2005). O que se pode observar na maneira que as flechas se comportam é que todas elas levam ao ponto  $E_0$ , que é o ponto de equilíbrio intertemporal estável do sistema, ou seja, essa intercepção representa o ponto estacionário.

---

<sup>1</sup>Chiang (2005) explica que as linhas de fluxo são conhecidas formalmente como trajetórias de fase ou caminhos de fase, pois o diagrama não permite formalmente a presença do eixo  $t$  que se referenciaria ao tempo. Sendo assim, elas não passam informação nenhuma quanto velocidade e aceleração destes pontos ao longo do tempo, apenas a direção do movimento.

Figura 3.3: Linhas de Fluxo do Diagrama de Fase do Modelo Uni-Elastico



Fonte: Heijdra e Van Der Ploeg, 2002

Nota: Elaboração Própria

Dependendo da configuração das linhas de fluxo que circulam num determinado equilíbrio intertemporal é necessário caracterizar em qual formato o sistema se encaixa (CHIANG, 2005). No caso da Figura 3.3, a categoria que as linhas de fluxo ali demonstradas são categorizadas como sendo um ponto de sela.

O ponto de sela é um equilíbrio do sistema que é caracterizado por apresentar dupla personalidade. Nele o equilíbrio é considerado instável, ou seja, nem todas as linhas de fluxo fluem de modo direto e consistente para o ponto de equilíbrio, o ponto  $E_0$ . Exatamente um par das linhas de fluxo são consideradas ramos instáveis, como acontece no quadrante (II) e (IV), na Figura 3.1. O outro par são consideradas como sendo linhas de fluxo de ramos estáveis, que fluem de modo direto e consistente em direção ao equilíbrio, são representadas então pelas flechas nos quadrantes (I) e (III) (CHIANG, 2005).

Apenas os pontos iniciais que estejam sobre os dois ramos estáveis do ponto de sela, nesse caso pode ser representado pela linha pontilhada  $SP_0$  na Figura 3.3, irão levar para o ponto de equilíbrio  $E_0$ . Todos os outros pontos irão fluir para outras regiões se afastando do ponto de equilíbrio, por exemplo, pontos situados inicialmente ao lado esquerdo da linha pontilhada  $SP_0$  no quadrante (I) e ao lado direito no quadrante (III) irão ser dominados pela rota maior e o sistema vai verter para a região (II) (SHONE, 2002).

Dessa maneira, podemos resumir essa relação como sendo dependente da direção que as linhas de fluxo seguem no sistema que, em contrapartida, dependem das condições de equilíbrio no mercado de capital (CSE - *Capital Stock Equilibrium*) e o equilíbrio no consumo (CE - *Consumption Equilibrium*). Em uma situação em que o ponto inicial não se encontra no estado estacionário, as várias forças do mercado iriam conduzir o sistema rumo a posição de equilíbrio  $E_0$ , somente se este ponto estiver inicialmente situado em cima da linha pontilhada  $SP_0$ .

# Capítulo 4

## Política Fiscal

Nessa seção iremos analisar os efeitos sobre as principais variáveis macroeconômicas quando há aumento do consumo do governo financiado por um imposto fixo (*"lump-sum taxes"*). De acordo com Barbosa e Siqueira (2001), o imposto de montante fixo é caracterizado por não gerar ineficiência na alocação de recursos na economia.

Assumimos também que o choque sobre a economia não é antecipado, e sim permanente e que, inicialmente, a economia se encontra no equilíbrio. De acordo com Baxter e King (1993), o efeito de choques permanentes no produto e no consumo é maior que quando comparado com choques temporários e isso ocorre por que o consumo obedece a hipótese da renda permanente, estabelecida por Milton Friedman para explicar o comportamento do consumidor.

Nessa hipótese, Friedman argumenta que o consumo depende da renda permanente, pois quando ocorre uma variação da renda transitória, os agentes da economia podem recorrer à empréstimos, ou à poupança para nivelar o seu consumo em resposta à essas mudanças (MANKIW, 1989).

Outro ponto importante é que a análise é dividida entre longo e curto prazo. Essa divisão ocorre por que os dois momentos apresentam diferentes respostas na economia. Primeiramente, iremos analisar os multiplicadores de longo prazo, pois a análise é mais objetiva e o efeito do choque é, de certa forma, mais intenso à curto prazo do que comparada com o efeito à longo prazo.

### Multiplicadores de Longo Prazo

No modelo estaremos no estado estacionário do sistema, ou seja, no equilíbrio, quando o estoque de capital e o consumo forem constantes:  $\dot{K} = \dot{C} = 0$ . Nesse ponto, o modelo é caracterizado por apresentar "razões ótimas" (*great ratios*) que não influenciam no consumo público, e pelo equilíbrio nos preços mesmo quando ocorre um choque no consumo do governo, pois o que irá se alterar é somente os recursos e os investimentos disponíveis (BAXTER, 1993).

A partir da tabela 3.1 que resume o modelo uni-elástico, temos o processo de acúmulo de capital e a equação de consumo:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad (\text{T1.1})$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = r(t) - \delta \quad (\text{T1.2})$$

Sabendo que  $\dot{K}(t) = 0$  e  $\dot{C}(t) = 0$  no equilíbrio do sistema, teremos portanto:

$$I(t) = \delta K(t) \Rightarrow \frac{I(t)}{K(t)} = \delta$$

$$r(t) = \rho$$

Pela condição de produtividade marginal do capital (T1.5), o produto per capita  $y^*$  estará em função dos parâmetros estruturais:

$$r(t) + \delta = (1 - \epsilon_L) \left( \frac{Y(t)}{K(t)} \right) \quad (\text{T1.5})$$

Teremos:

$$y^* = \frac{Y^*(t)}{K^*(t)}$$

$$r(t) + \delta = (1 - \epsilon_L) y^*$$

$$y^* = \frac{\rho + \delta}{1 - \epsilon_L}$$

De acordo com a função de produção Cobb-Douglas (T1.8), estamos diante de uma tecnologia com retorno constante de escala, onde teremos a seguinte função de produção com intensidade de capital, que irá depender de uma única razão capital-trabalho  $\left(\frac{K}{L}\right)$ :

$$Y(t) = Z_0 L(t)^{\epsilon_L} K(t)^{1-\epsilon_L} \quad (\text{T1.8})$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{Z_0 L(t)^{\epsilon_L} K(t)^{1-\epsilon_L}}{L(t)}$$

$$y(t) = Z_0 \frac{K(t)}{L(t)} \left( \frac{L(t)}{K(t)} \right)^{\epsilon_L}$$

$$y(t) = Z_0 K(t) \left( \frac{1}{K(t)} \right)^{\epsilon_L}$$

$$y(t) = Z_0 K(t)^{(1-\epsilon_L)}$$

A partir de (T.7) podemos determinar o salário que irá depender da razão entre o consumo de produtos e o consumo de lazer, como especificado abaixo:

$$W(t)[1 - L(t)] = \left( \frac{1-\epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C(t) \quad (\text{T1.6})$$

$$W(t) = \left( \frac{1-\epsilon_C}{\epsilon_C} \right) \frac{C(t)}{1-L(t)}$$

A presença de várias razões constantes no equilíbrio de longo prazo, pode ser explorado para encontrar os efeitos de longo prazo de um aumento do consumo público. Vamos fazer a diferenciação total da condição de equilíbrio no mercado do produto (T1.6):

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) \quad (\text{T1.6})$$

$$dY(t) = dC(t) + dI(t) + dG(t)$$

$$\frac{dY(t)}{Y} = \frac{C}{Y} \frac{dC(t)}{C} + \frac{I}{Y} \frac{dI(t)}{I} + \frac{G}{Y} \frac{dG(t)}{G}$$

$$\frac{dY(t)}{Y} = \omega_C \frac{dC(t)}{C} + \omega_I \frac{dI(t)}{I} + \omega_G \frac{dG(t)}{G}$$

onde a participação do consumo, do investimento e do gasto do governo deve somar um total de 1. Assim temos:  $\omega_C + \omega_I + \omega_G = 1$ . Então quando  $t = \infty$ , teremos que:

$$\frac{dY(\infty)}{Y} = \omega_C \frac{dC(\infty)}{C} + \omega_I \frac{dI(\infty)}{I} + \omega_G \frac{dG}{G} \quad (4.1)$$

Segundo Heijdra et al. (2002), o choque no gasto público, irá restabelecer as várias razões no equilíbrio, isso implica uma certa relação de longo prazo (na forma de log linear), onde as taxas de crescimento são iguais e constantes no equilíbrio de longo prazo:

$$\frac{dY(\infty)}{Y} = \frac{dK(\infty)}{K} = \frac{dI(\infty)}{I} = \frac{dL(\infty)}{L} \quad (4.2)$$

Abaixo será encontrado essas relações de equilíbrio no longo prazo. Temos, primeiramente, o produto por trabalho:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$$

$$\text{Em Logaritmo: } \ln(y(t)) = \ln(Y(t)) - \ln(L(t))$$

$$\text{Diferenciando em } t: \frac{\dot{y}(t)}{y} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y} - \frac{\dot{L}(t)}{L}$$

Como no equilíbrio de longo prazo as variáveis estão no estado estacionário, então:  $\dot{C}(t) = \dot{K}(t) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = 0$ . Portanto, em termos contínuos teremos:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y} = \frac{\dot{L}(t)}{L}$$

Em termos discretos a equação ficará:

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \frac{dL(t)}{L(t)}$$

Assumimos que a poupança seja uma fração constante do produto e seja igual ao investimento,  $S(t) = I(t)$ , dessa forma podemos encontrar a seguinte relação:

$$S(t) = sY(t)$$

onde  $0 < s < 1$  é a propensão marginal à poupar.

$$\text{Em Logaritmo: } \ln(S(t)) = \ln(s) + \ln(Y(t))$$

$$\text{Diferenciando em } t: \frac{\dot{S}(t)}{S} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y}$$

Em termos contínuos teremos:

$$\frac{\dot{S}(t)}{S} = \frac{\dot{I}(t)}{I} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y}$$

Em termos discretos a equação ficará:

$$\frac{dS(t)}{S} = \frac{dI(t)}{I} = \frac{dY(t)}{Y}$$

Considerando a equação de acumulação de capital (T1.1), no equilíbrio teremos:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad (\text{T1.1})$$

$$I(t) = \delta K(t)$$

$$dI(t) = \delta dK(t)$$

$$\frac{dI(t)}{I} = \frac{\delta}{\delta} \frac{dK(t)}{K}$$

$$\frac{dI(t)}{I} = \frac{dK(t)}{K}$$

Agora é preciso determinar a taxa de crescimento do produto no equilíbrio de longo prazo. Para isso, temos a equação (2.14):

$$\frac{C(\tau)}{(1-L(\tau))^{\frac{1}{\sigma_L}}} \left( \frac{1-\epsilon_C}{\epsilon_C} \right) = W(\tau) \quad (2.14)$$

Aplicando o logaritmo e fazendo a diferenciação total de 2.14, considerando  $\tau = t$ :



$$\ln(C(t)) - \frac{1}{\sigma_L}[1 - L(t)] + \ln\left(\frac{1-\epsilon_C}{\epsilon_C}\right) = \ln(W(t))$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} - \frac{1}{\sigma_L} \left( \frac{-\dot{L}(t)}{1-L(t)} \right) = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)}$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} + \frac{1}{\sigma_L} \frac{L(t)}{L(t)} \left( \frac{\dot{L}(t)}{1-L(t)} \right) = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)}$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} + \frac{1}{\sigma_L} \frac{L(t)}{1-L(t)} \left( \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right) = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)}$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} + \frac{1}{\sigma_L} \frac{1}{\omega_{LL}} \left( \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right) = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)}$$

onde:  $\omega_{LL} = \frac{1-L(t)}{L(t)}$ . Como  $L(t)$  indica a oferta de trabalho e  $1 - L(t)$  é caracterizado como sendo o lazer, por meio desse parâmetro, pode-se fazer uma relação entre as duas variáveis.

Portanto:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \sigma_L \omega_{LL} \left[ \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} - \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \right] \quad (4.3)$$

A versão discreta da equação 4.3 será:

$$\frac{dL(t)}{L} = \sigma_L \omega_{LL} \left[ \frac{dW}{W} - \frac{dC}{C} \right]$$

Dessa forma a oferta de trabalho depende negativamente do consumo e positivamente do salário, ou seja, quanto maior é o salário ofertado, maior é a oferta de trabalho no mercado e o inverso acontece com o consumo. No modelo uni-elástico  $\sigma_L = 1$ , a equação 4.2 será:

$$\frac{dY(\infty)}{Y} = \frac{dK(\infty)}{K} = \frac{dI(\infty)}{I} = \frac{dL(\infty)}{L} = -\omega_{LL} \left( \frac{dC(\infty)}{C} \right) \quad (4.4)$$

A partir de 4.1 e 4.4 podemos encontrar o multiplicador do produto,  $\frac{dY(\infty)}{Y}$ :

$$\frac{dY(\infty)}{Y} = -\omega_{LL} \frac{dC(\infty)}{dC}$$

$$\frac{dC(\infty)}{dC} = -\frac{1}{\omega_{LL}} \frac{dY(\infty)}{Y}$$

$$\frac{dY(\infty)}{Y} = \omega_C \left( \frac{dC(\infty)}{C} \right) + \omega_I \left( \frac{dY(\infty)}{Y} \right) + \omega_G \left( \frac{dG(\infty)}{G} \right)$$

$$\frac{dY(\infty)}{Y} = -\frac{\omega_C}{\omega_{LL}} \left( \frac{dY(\infty)}{Y} \right) + \omega_I \left( \frac{dY(\infty)}{Y} \right) + \omega_G \left( \frac{dG(\infty)}{G} \right)$$

$$\left( 1 - \omega_I + \frac{\omega_C}{\omega_{LL}} \right) \frac{dY(\infty)}{Y} = \omega_G \frac{dG}{G}$$

$$\frac{dY(\infty)}{dG} = \left( \frac{1}{1 - \omega_I + \frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} \right) \omega_G \frac{Y}{G}$$

Lembrando que  $\omega_G = \frac{G}{Y}$ , o multiplicador do produto terá a seguinte forma:

$$\frac{dY(\infty)}{dG} = \frac{1}{1 - \omega_I + \frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} > 0 \quad (4.5)$$

Agora vamos determinar o multiplicador de longo prazo do consumo. A partir de 4.4 temos:

$$\frac{dY(\infty)}{Y} = -\omega_{LL} \frac{dC(\infty)}{C}$$

$$\frac{dY(\infty)}{dG} \frac{Y}{Y} = -\omega_{LL} \frac{dC(\infty)}{dG} \frac{C}{C}$$

$$\frac{dC(\infty)}{dG} = -\frac{1}{\omega_{LL}} \frac{C}{Y} \frac{dY(\infty)}{dG}$$

$$\frac{dC(\infty)}{dG} = -\frac{1}{\omega_{LL}} \frac{C}{Y} \frac{dY(\infty)}{dG}$$

$$\frac{dC(\infty)}{dG} = -\frac{1}{\omega_{LL}} \frac{C}{Y} \left[ \frac{1}{1 - \omega_I + \frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} \right]$$

$$\frac{dC(\infty)}{dG} = -\frac{1}{\omega_{LL}}\omega_C \left[ \frac{1}{1-\omega_I+\frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} \right]$$

$$\frac{dC(\infty)}{dG} = -\frac{\frac{\omega_C}{\omega_{LL}}}{1-\omega_I+\frac{\omega_C}{\omega_{LL}}}$$

Dessa forma teremos:

$$-1 < \frac{dC(\infty)}{dG} = -\frac{\frac{\omega_C}{\omega_{LL}}}{1-\omega_I+\frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} < 0 \quad (4.6)$$

Vamos determinar o multiplicador do investimento e do estoque de capital a partir de (T1.1):

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta(t) \quad (\text{T1.1})$$

No equilíbrio:  $\dot{K}(t) = 0 \Rightarrow I(t) = \delta K(t)$

$$dK = \frac{1}{\delta}dI$$

$$\frac{dK(\infty)}{dG} = \frac{1}{\delta} \frac{dI(\infty)}{dG}$$

$$\text{De 4.4: } \frac{dI(\infty)}{I} = -\omega_{LL} \frac{dC(\infty)}{C}$$

$$\frac{dI(\infty)}{dG} \frac{1}{I} = -\omega_{LL} \frac{dC(\infty)}{dG} \frac{1}{C}$$

$$\frac{dI(\infty)}{dG} = -\omega_{LL} \frac{I}{C} \frac{dC(\infty)}{dG}$$

$$\frac{dI(\infty)}{dG} = -\omega_{LL} \frac{I}{C} \frac{Y}{Y} \frac{dC(\infty)}{dG}$$

$$\frac{dI(\infty)}{dG} = -\omega_{LL} \frac{I}{Y} \frac{Y}{C} \frac{dC(\infty)}{dG}$$

$$\frac{dI(\infty)}{dG} = -\omega_{LL}\omega_I \frac{1}{\omega_C} \frac{dC(\infty)}{dG}$$

$$\frac{dI(\infty)}{dG} = \omega_{LL}\omega_I \frac{1}{\omega_C} \left[ \frac{\frac{\omega_C}{\omega_{LL}}}{1 - \omega_I + \frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} \right]$$

O multiplicador do investimento terá a seguinte forma:

$$\frac{dI(\infty)}{dG} = \frac{\omega_I}{1 - \omega_I + \frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} > 0 \quad (4.7)$$

O multiplicador do estoque de capital será:

$$\frac{dK(\infty)}{dG} = \frac{1}{\delta} \frac{dI(\infty)}{dG}$$

$$\frac{dK(\infty)}{dG} = \frac{\frac{\omega_I}{\delta}}{1 - \omega_I + \frac{\omega_C}{\omega_{LL}}} > 0 \quad (4.8)$$

A função do multiplicador é a de mensurar a proporcionalidade de uma resposta da variável endógena sobre a variação de uma variável exógena. De acordo com Heijdra et al. (2002), várias observações podem ser feitas a partir desses resultados dos multiplicadores derivados nas funções. A primeira delas é que ao deixar endógeno a decisão à respeito da oferta de trabalho isso terá um papel importante sobre o multiplicador na economia neoclássica.

Se a oferta de trabalho for exógena ( $\epsilon_C = 1$ ), então  $L = 1$  e  $\omega_{LL} = 0$ . Dessa forma a equação 4.4 fornece um resultado imediato a respeito do produto, investimento e o estoque de capital, onde as taxas de crescimento dessas variáveis não serão alteradas, pois como  $\omega_{LL} = 0$ , então as variáveis da equação 4.4 permaneceriam constantes.

A equação 4.6 informa que haverá um "*crowding-out*" entre consumo privado e consumo público, isto é, um impacto negativo sobre o consumo privado resultante do aumento do gasto do governo. O efeito desse "*crowding-out*" entre o consumo público e o consumo privado é de um para um, pois como os agentes só dependem da taxa de salário que está fixa pela situação de estado estacionário, ou seja, onde a taxa de juros é igual a taxa de preferência temporal ( $r = \rho$ ).

A elasticidade de oferta de trabalho ( $\sigma_L$ ), também tem um papel importante. Para o caso geral onde a elasticidade de oferta de trabalho não é neutra  $\sigma_L \neq 1$ , ou seja, quando os agentes são bem sensíveis às mudanças de preços, então maior serão os multiplicadores. Ao substituir  $\omega_{LL}$  para  $\sigma_L \omega_{LL}$  nos multiplicadores demonstrados nas equações: 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, os efeitos de longo prazo para o modelo mais geral serão obtidos. Consequentemente, para a oferta de trabalho mais elástica, quanto maior for  $\sigma_L$ , maior será os efeitos de longo prazo sobre o produto, capital e investimento, e menor será o efeito "*crowding-out*" sobre o consumo.

No longo prazo o efeito do choque fiscal sobre o investimento e o estoque de capital é positivo, como pode ser observado pelos multiplicadores expressados nas equações 4.7 e 4.8. Dessa maneira, um aumento do gasto do governo irá refletir com um aumento do investimento e do estoque de capital.

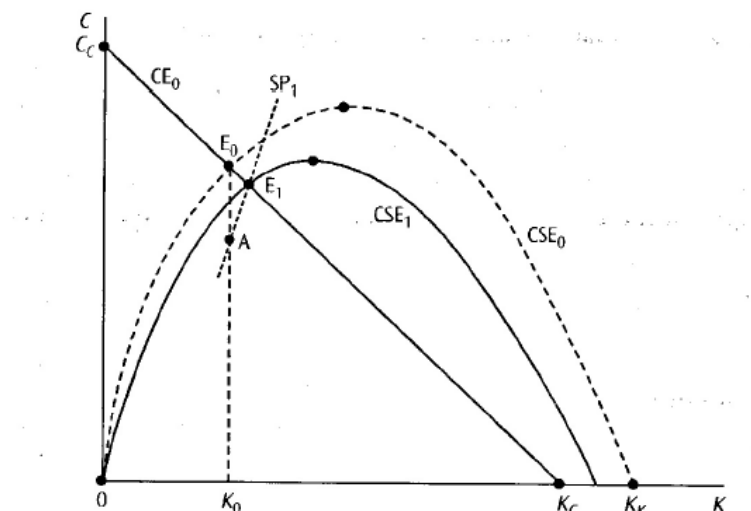
Essa situação pode estar ocorrendo porque quando os agentes racionais inseridos nessa economia se sentem com menor poder aquisitivo, em razão do aumento dos tributos, os mesmos tendem a poupar mais do que antes e, nessa medida, aumentar o estoque de capital. No entanto, a longo prazo, o consumo irá aumentar na medida que esses agentes ofertam mais trabalho. Essa situação será graficamente explicada assim que analisarmos os efeitos à curto prazo.

## Multiplicadores de Curto Prazo

Na Figura 4.1, o efeito de um choque fiscal positivo, ou seja, um aumento dos gastos do governo, é representado pela movimentação da curva de equilíbrio do estoque de capital (CSE - *Capital Stock Equilibrium*) da posição inicial  $CSE_0$  para  $CSE_1$ .

Segundo Heijdra et al. (2002), já que os impostos fixos são usados apenas para balancear o orçamento do produto, a reta que expressa o equilíbrio no consumo (CE - *Consumption Equilibrium*) não é alterada. Assim sendo, em longo prazo podemos observar que o ponto de equilíbrio muda de  $E_0$  para  $E_1$ . O consumo de equilíbrio diminui e o estoque de capital aumenta, as relações são demonstradas pelo intervalo que os multiplicadores 4.5

Figura 4.1: Efeitos da Política Fiscal no Diagrama de Fase do Modelo Uni-Elastico



Fonte: Heijdra e Van Der Ploeg, 2002

e 4.8 estão inseridos.

No curto prazo, a economia pula para o ponto A que está localizado no novo ramo estável do ponto de sela  $SP_1$ . Os agentes diminuem tanto o consumo quanto lazer de sua utilidade, pois eles se sentem mais pobres por estarem diante de uma maior tributação. Essa primeira impressão irá causar um impacto no mercado de trabalho. Os agentes então passam a ofertar mais mão-de-obra, pois eles visam o mesmo nível de consumo e lazer que permanece na função utilidade da vida desse consumidor vista no modelo pela equação 2.1.

Esse estímulo do emprego irá causar uma expansão no produto agregado e um incremento no produto marginal do capital, e portanto, uma expansão nos juros reais da economia, apesar do fato de que o estoque de capital é fixo no curto prazo. Esse aumento da taxa de juros, não somente resulta em um aumento do consumo, mas também cria um estímulo sobre a poupança e investimento para a família representativa, dessa forma tanto o consumo quanto o estoque de capital irão aumentar. Essa movimentação é demonstrada na Figura 4.1 pela mudança do ponto A para o novo ponto de equilíbrio  $E_1$ .

O efeito de longo prazo para o estoque de capital é positivo, como representado pelo multiplicador na equação 4.8 e o efeito no consumo é negativo, ver multiplicador 4.6, por essa razão, no longo prazo, o consumo cai e o estoque de capital aumenta. Como o agente reage ao choque fiscal com um aumento no acúmulo de estoque de capital e

ofertando mais trabalho, o produto em equilíbrio irá aumentar e o efeito "*crowding-out*" irá ser menor.

De acordo com Heijdra et al. (2002), embora seja possível analisar as propriedades qualitativas do modelo como especificadas por meio do gráfico na Figura 4.1, tal método não é útil para obter resultados quantitativos. Por exemplo, a partir da análise das equações demonstradas nessa seção é possível observar um "*overshoot*" sobre o consumo (movimento do ponto  $E_0$  para o ponto A) e, logo depois, um aumento do consumo mesmo com o "*crowding-out*",  $\left(\frac{dC(0)}{dG}\right) < \left(\frac{dC(\infty)}{dG}\right) < 0$ , (movimento do ponto A para o ponto  $E_1$ ). Entretanto, é impossível descobrir o valor da magnitude do "*overshooting*" e do efeito do "*crowding-out*".

Na seção anterior demonstramos o gráfico do modelo uni-elástico e analisamos os ramos instáveis e estáveis que caracterizavam o modelo exposto. Agora que movimentamos a economia com um choque fiscal, ou seja, a economia saiu do equilíbrio inicial e o ponto atingido (ponto A) está longe da posição de equilíbrio inicial (ponto  $E_0$ ), podemos observar que as várias forças presentes no mercado tenderiam a conduzir o sistema rumo à uma nova posição de equilíbrio (ponto  $E_1$ ).

Podemos notar também que esse sistema só voltou para o novo ponto de equilíbrio (ponto  $E_1$ ), porque o ponto A se encontrava no quadrante (III), como já vimos na Figura 3.3, e em cima do ramo estável do ponto de sela  $SP_0$ . Dessa forma, o sistema irá fluir de modo direto e consistente em direção ao equilíbrio.

# Capítulo 5

## Conclusão

A oferta de trabalho considerada endógena presta um papel fundamental na análise qualitativa dos ciclos econômicos, pois é dessa forma que o sistema consegue compreender uma variável extremamente significativa no sistema e implementar o modelo para a melhor avaliação dos choques exógenos que ocorrem.

Por meio da extensão do modelo de Ramsey, tornamos o capital humano como uma variável endógena e observamos as consequências que essa mudança reflete no modelo desse estudo.

A principal conclusão à respeito do Modelo *Real Business Cycle* pode ser feita quando analisa-se o diagrama de fase do modelo uni-elástico. Primeiramente, o diagrama esboça as setas direcionais que revelam o movimento dinâmico do sistema a partir do ponto inicial concebido, as chamadas linhas de fluxo. Para o modelo formulado nesse estudo, a configuração dessas linhas entra na categoria dos pontos de sela, pois é possível observar que o equilíbrio possui duas configurações distintas, um par de linhas de fluxo que fluem para o equilíbrio (ramos estáveis), e outro par de linhas de fluxo para o lado oposto do mesmo (ramos instáveis).

Um choque exógeno, como o aumento dos gastos do governo, por meio de aumento dos impostos fixos (*lump-sum taxes*), irá deslocar o ponto de equilíbrio estacionário inicial. As famílias significativas se sentiram mais pobres, no curto prazo, e irão diminuir o seu consumo tanto de bens produtivos, quanto de lazer e ofertar mais trabalho. Esse choque fiscal positivo, portanto, fará com que sistema permaneça em um ponto abaixo do ponto de equilíbrio, pois o consumo está diminuindo. No entanto, o estoque de capital permanece inalterado é apenas no longo prazo que o mesmo irá se modificar.



Esse ponto onde a economia se encontra logo após o aumento dos gastos do governo, precisa pertencer aos pontos de sela. Somente assim o sistema conseguirá, se estiver em um dos ramos estáveis, convergir para um novo estado estacionário. No caso do modelo, esse estado de equilíbrio será atingido no longo prazo.

A pressão no mercado de trabalho, gerada pelas consequências da política fiscal positiva, produzirá uma expansão nos produtos agregados que, conseqüentemente, irá aumentar a taxa de juros. Pelos multiplicadores observa-se que o consumo é negativo em relação com o gasto do governo. Assim o consumo de equilíbrio de longo prazo será menor que o consumo inicial. Como o agente reage ao choque acumulando mais estoque de capital, é de se esperar que os multiplicador encontrado para o mesmo seja positivo, assim como o multiplicador para o investimento, exatamente como foi verificado pelas equações metodológicas derivadas do modelo.

A política fiscal tem efeitos diferentes nos canais de transmissão observados no modelo, como o consumo, o investimento, o produto e o estoque de capital. Através dos multiplicadores, pode-se observar também que o multiplicador do produto não é potencializado quando ocorre a alteração nos gastos do governo. Nesse caso então, podemos dizer que o multiplicador fiscal é igual à um.

A oferta de trabalho considerada endógena tem um papel significativo no modelo, na medida em que quando avaliamos o sistema considerando a variável como sendo exógena, no qual o modelo de Ramsey se baseia. Notamos que com uma mudança nos gastos do governo, os resultados à longo prazo do investimento e estoque de capital seriam constantes no tempo. Diferente do que ocorre quando se considera a oferta de trabalho como sendo endógena.

A elasticidade da substituição da oferta de trabalho também é caracterizada por apresentar uma grande importância no modelo exposto. Quanto maior fosse o valor dessa variável, maior seria os efeitos à longo prazo das razões sobre o produto, o estoque de capital e o investimento.

Entretanto, embora o modelo desenvolvido tenha explicado diversas análises qualitativas do sistema, o mesmo não consegue compreender análises quantitativas. Métodos empíricos não se encaixam na vertente teórica utilizada. Uma proposta para trabalhos futuros seria calcular os efeitos transitórios da magnitude do "*overshooting*", quando o consumo diminui no curto prazo e depois aumenta até uma magnitude menor que o con-

sumo de equilíbrio inicial, e do efeito do "*crowding-out*" sobre a economia, que representa o impacto negativo das despesas públicas no consumo que acontecem na presença de algum tipo de choque, a prática padrão da literatura RBC é log-linearizar o modelo ao longo do período e dessa forma conseguir analisar os resultados dos multiplicadores mais facilmente.

## Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, Estela dos Santos e Teixeira, José Carlos Abreu. *Apresentação de Trabalhos Monográficos de Conclusão de Curso, 8a. edição revisada*, EdUFF, 2005.
- [2] CHIANG. A. **Elements of dynamic optimization**. McGraw-Hill, 1992
- [3] CHIANG, A. **Matemática para Economistas**. 4ª edição. São Paulo: Editora Campus, 2005
- [4] BARBOSA, Ana Luiza Neves de Holanda; SIQUEIRA, Rozane Bezerra de. **Imposto ótimo sobre o consumo: resenha da teoria e uma aplicação ao caso brasileiro**, Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), 2001
- [5] BAXTER, M. e KING, G. K., *Fiscal Policy in General Equilibrium*, **The American Economic Review**, vol. 83, n. 3 (Jun) pp. 315-334, 1993
- [6] BLANCHARD, Olivier J.; FISCHER, Stanley. *Lectures on macroeconomics*. MIT press, 1989
- [7] CAMPBELL, J. Y., *Inspection the Mechanism: An analytical approach to the stochastic growth model*, **Journal of Monetary Economics**, vol. 33, pp. 463-506, 1994
- [8] **CTAN** (Comprehensive TeX Archive Network), <http://www.ctan.org/>.
- [9] CYPHER, J. e DIETZ, J. **The process of economic development**. Nova Iorque: Routledge, 2014. 57p
- [10] BARRO, Robert; SALA-I-MARTIN, Xavier. **Economic Growth**. 2ª Edição. 2004
- [11] HARTLEY, James E.; HOOVER, Kevin D.; SALYER, Kevin D. (Ed.). **Real business cycles: A reader**. Psychology Press, 1998

- [12] HEIJDR, B. J. E VAN DER PLOEG, F., **Foundation of Modern Macroeconomics**, The Oxford University Press, 2002, 718pp.
- [13] JOHNS, David A. and MARTIN, Ken. **Analog Integrated Circuit Design**, John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [14] JONES, Charles I. **Introduction to Economic Growth**. 1nd ed. New York: Norton & Company. 1997
- [15] KEYNES, J. M. **A teoria geral do emprego, do juro e da moeda**. São Paulo: Atlas, 1936
- [16] KING, R. G. e REBELO, S., Resuscitating real business cycles, in TAYLOR, J. B. e WOODFORD, M. editors, **Handbook of Macroeconomics, volume 1B**, North-Holland, Amsterdam 1999
- [17] MANKIW, N. GREGORY. **Macroeconomia**, 3a Edição. LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora SA, Rio de Janeiro, 1989
- [18] MANKIW, N. Gregory. Real business cycles: A new Keynesian perspective. 1989
- [19] MANKIW, N. Gregory. The savers-spenders theory of fiscal policy. National bureau of economic research, 2000
- [20] MITRA, Sanjit K. , *Digital Signal Processing - A Computer-Based Approach.*, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1998.
- [21] PARKER, Jonathan A. **Euler equations**. 2007
- [22] PINDYCK, Robert S.; RUBINFELD, D. L. **Microeconomia**, sexta edição. 2007
- [23] ROMER, David. **Advanced Macroeconomics**. 2nd ed. New York: The MacGraw-Hill Companies. 2001
- [24] SAMUELSON, Paul A. **Economic Theory and Mathematics—An Appraisal**. The American Economic Review 42, no. 2 (1952): 56-66
- [25] SHONE, Ronald. **Economic Dynamics: Phase diagrams and their economic application**. Cambridge University Press, 2002

- [26] WICKENS, Michael; WICKENS, Mike. **Macroeconomic theory: a dynamic general equilibrium approach**. Princeton University Press, 2008

# Apêndice A

## Função de utilidade unielástica

Para o caso 1:  $\sigma_L = 1$ , da função utilidade unielástica, temos:

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} \left[ \frac{(1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma_L}} \right] = \ln(1 - L(\tau)) \quad (\text{A.1})$$

Para resolver a equação A.1 podemos aplicar a regra de L'Hopital, onde o limite da função é igual ao limite das derivadas das funções presentes no numerador e denominador. Essa regra pode ser aplicada somente se essas duas equação obtiverem um limite igual a zero quando resolvidas separadamente. Assim:

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Somente se:

$$\begin{cases} \lim_{\sigma_L \rightarrow 1} f(x) = 0 \\ \lim_{\sigma_L \rightarrow 1} g(x) = 0 \end{cases}$$

Calculando os limites do numerador e do denominador da função de utilidade unielástica, temos que:

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} (1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1 = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} 1 - \frac{1}{\sigma_L} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Sabendo que a função respeita o conceito aplicado acima, podemos assim adotar a regra de L'Hopital para resolver a equação indeterminada. Começamos então derivando a função apresentada em A.3:

$$\frac{d\left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right)}{d\sigma_L} = \frac{1}{\sigma_L^2} \quad (\text{A.4})$$

Em seguida precisamos calcular a derivada da função apresentada em A.2:

$$\frac{d(1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1}{d\sigma_L}$$

Para isso utilizamos a regra dos expoentes  $a^b = e^{b \ln(a)}$ . Assim temos que:

$$e^{\left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right) \ln(1 - L(\tau))}$$

Por meio da regra da cadeia, onde  $\frac{df(u)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ . Temos que:

$$\frac{de^{\left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right) \ln(1 - L(\tau))}}{d\sigma_L} = \frac{e^u}{du} \cdot \frac{d\left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right) \ln(1 - L(\tau))}{d\sigma_L}$$

Sendo que  $u = \left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right) \ln(1 - L(\tau))$ , podemos resolver a equação:

$$\frac{de^{\left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right) \ln(1 - L(\tau))}}{d\sigma_L} = e^u \cdot \frac{\ln(1 - L(\tau))}{\sigma_L^2} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo  $u = \left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right) \ln(1 - L(\tau))$  na equação A.5, temos:

$$e^{\left(1 - \frac{1}{\sigma_L}\right) \ln(1 - L(\tau))} \cdot \frac{\ln(1 - L(\tau))}{\sigma_L^2} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a propriedade operatória do logaritmo, onde:  $a^{\log_a(b)} = b$ , na primeira parte da equação A.6, temos a derivada da função:

$$\frac{d(1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1}{d\sigma_L} = (1 - L(\tau))^{\frac{1}{\sigma_L}} \cdot \frac{\ln(1 - L(\tau))}{\sigma_L^2} \quad (\text{A.7})$$

Portanto, o limite pode ser calculado substituindo as derivadas da equação A.7 e A.4 na função.

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} \frac{\frac{(1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} \ln(1 - L(\tau))}{\sigma_L^2}}{\frac{1}{\sigma_L^2}} \quad (\text{A.8})$$

Assim:

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} (1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} \ln(1 - L(\tau)) \quad (\text{A.9})$$

Portanto, o limite da equação pode ser calculado como sendo:

$$\lim_{\sigma_L \rightarrow 1} \left[ \frac{(1 - L(\tau))^{1 - \frac{1}{\sigma_L}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma_L}} \right] = \ln(1 - L(\tau)) \quad (\text{A.10})$$



# Apêndice B

## Diagrama de Fase Modelo Iso-Elástico

Derivar o diagrama de fase do modelo iso-elástico. Vamos eliminar o índice de tempo,  $t$ , para facilitar a notação, e considerar que a participação do gasto do governo no produto nacional seja constante,  $\omega_G \equiv \frac{G}{Y}$ .

Tabela B.1: O Modelo Unielástico

---

$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$	(T.11) = (2.19)
$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = r(t) - \rho$	(CPO); (T1.2) = (2.17)
$G(t) = T(t)$	(T1.3) = (2.28)
$W(t) = \epsilon_L \left( \frac{Y(t)}{L(t)} \right)$	(CPO); (T1.4) = (2.23)
$r(t) + \delta = (1 - \epsilon_L) \left( \frac{Y(t)}{K(t)} \right)$	(CPO); (T1.5) = (2.26)
$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$	(T1.6) = (2.27)
$W(t)(1 - L(\tau)) = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C(t)$	(T1.7) = (2.14)
$Y(t) = Z_0 L(t)^{\epsilon_L} K(t)^{1 - \epsilon_L}$	(T1.8) = (2.17)

---

Usando a demanda de trabalho (T1.4); a oferta de trabalho (T1.7); e a função de produção (T1.8), obtemos uma expressão que relaciona emprego, consumo, capital, no equilíbrio ("LME - *Labor Market Equilibrium*").

$$\epsilon_L \left( \frac{Y}{L} \right) [1 - L] = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C$$

$$\epsilon_L \left( \frac{Z_0 L^{\epsilon_L} K^{1 - \epsilon_L}}{L} \right) [1 - L] = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C$$

$$\epsilon_L (Z_0 L^{\epsilon_L} K^{1 - \epsilon_L}) [1 - L] = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C$$

$$(L^{\epsilon_L - 1} K^{1 - \epsilon_L}) [1 - L] = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C \epsilon_L Z_0} \right) C$$

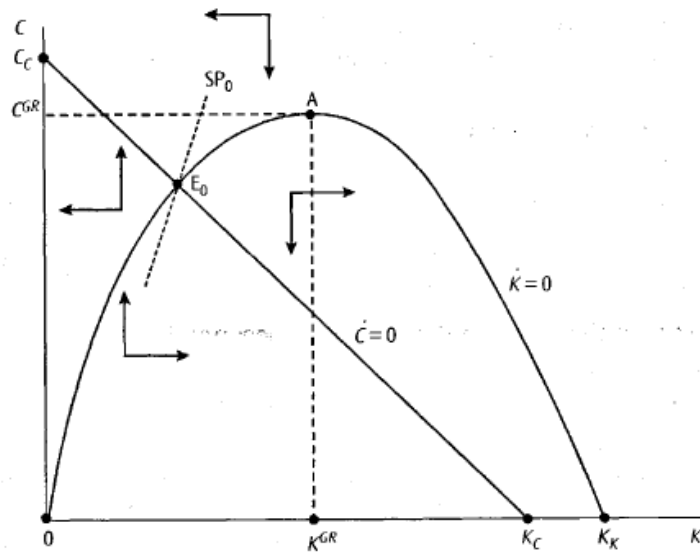
$$(1 - L) L^{\epsilon_L - 1} = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C \epsilon_L Z_0} \right) \frac{C}{K^{1 - \epsilon_L}}$$

$$LME : \quad (f(L) \equiv) (1 - L) L^{\epsilon - 1} = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C \epsilon_L Z_0} \right) C K^{-(1 - \epsilon_L)} \quad (B.1)$$

com  $f'(L) < 0$  e  $f''(L) > 0$ , no seguinte intervalo economicamente viável,  $L \in [0, 1]$ . Portanto,  $f(L)$  é representado na Figura B.1.

$$f'(L) = -L^{\epsilon_L - 1} + (\epsilon - 1)(1 - L)L^{\epsilon_L} < 0; \quad 0 < \epsilon_L < 1$$

Figura B.1: Modelo Uni-Elastico



Fonte: Heijdra e Van Der Ploeg, 2002

## Equilíbrio no Mercado de Capital

Substituindo (T1.1) em T(1.6), e considerando  $\dot{K} = 0$ .

$$I = \delta K$$

$$Y = C + \delta K + G$$

$$\delta K = Y - C - G$$

$$\delta K = Y - \omega_G Y - C$$

$$\delta K = (1 - \omega_G)Y - C \quad (\text{B.2})$$

Considerar (T1.4) em (T1.7)

$$\epsilon_L \left( \frac{Y}{L} \right) (1 - L) = \left( \frac{1 - \epsilon_C}{\epsilon_C} \right) C$$

$$C = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{Y}{L} \right) (1 - L) \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.3) em (B.2), assumindo  $0 < \epsilon_C < 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta K &= (1 - \omega_G)Y - \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{Y}{L} \right) (1 - L) \\ \delta K &= \left[ 1 - \omega_G - \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{1 - L}{L} \right) \right] Y \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A equação B.4 representa o locus de equilíbrio do mercado de capital ("*The Capital Stock Equilibrium, CSE locus*" ( $\dot{K} = 0$ )).

Apenas estamos interessados em valores positivos do produto e do capital, dessa forma o termo entre colchetes da expressão (B.4) deve ser não negativo. Isso nos leva a um limite inferior para o emprego:

$$1 - \omega_G - \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{1 - L}{L} \right) \geq 0$$

$$L(1 - \epsilon_C)(1 - \omega_G) - (\epsilon_C \epsilon_L)(1 - L) \geq 0$$

$$L(1 - \epsilon_C)(1 - \omega_G) \geq (\epsilon_C \epsilon_L)(1 - L)$$

$$L(1 - \epsilon_C)(1 - \omega_G) \geq \epsilon_C \epsilon_L - (\epsilon_C \epsilon_L)L$$

$$L(1 - \epsilon_C)(1 - \omega_G) + (\epsilon_C \epsilon_L)L \geq \epsilon_C \epsilon_L$$

$$L[(1 - \epsilon_C)(1 - \omega_G) + \epsilon_C \epsilon_L] \geq \epsilon_C \epsilon_L$$

$$L \geq L_{min} \equiv \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{\epsilon_C \epsilon_L (1 - \omega_G) + \epsilon_C \epsilon_L} \quad 0 < L_{min} < 1 \quad (\text{B.5})$$

Usando  $L_{min}$  (B.5) e (T1.8), podemos reescrever a equação (B.4):

$$\delta K = \left[ 1 - \omega_G - \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{1 - L}{L} \right) \right] Y \quad (\text{B.6})$$

$$\delta K = (1 - \omega_G)Y - \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{1 - L}{L} \right) Y$$

No  $L_{min}$ :

$$\delta K = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{1 - L}{L} \right) Z_0 L^{\epsilon_L} K^{1 - \epsilon_L}$$

$$\delta K^{\epsilon_L} = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{1 - L_{min}}{L_{min}} \right) \frac{L}{L} Z_0 L^{\epsilon_L}$$

$$\text{CSE:} \quad K^{\epsilon_L} = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}{\delta(1 - \epsilon_C)} \right) \left( \frac{L - L_{min}}{L_{min}} \right) L^{\epsilon_L - 1} \quad (\text{B.7})$$

A equação (B.7) representa uma função implícita,  $L = g(K)$ , no intervalo  $L \in [L_{min}, 1]$ , relacionando  $K$  e  $L$ . Para calcular a inclinação da função implícita, é preciso fazer a diferencial total da equação (B.7):

$$K^{\epsilon_L - 1} dK = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}{\delta(1 - \epsilon_C)} \right) \left[ \left( \frac{L - L_{min}}{L_{min}} \right) (\epsilon_L - 1) L^{\epsilon_L - 2} + L^{\epsilon_L - 1} \frac{1}{L_{min}} \right] dL$$

$$K^{\epsilon_L - 1} dK = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}{\delta(1 - \epsilon_C)} \right) \left[ \left( \frac{L - L_{min}}{L_{min}} \right) (\epsilon_L - 1) L^{-1} + \frac{1}{L_{min}} \right] L^{\epsilon_L - 1} dL$$

$$K^{\epsilon_L - 1} dK = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}{\delta(1 - \epsilon_C)} \right) \left[ \frac{(L - L_{min})(\epsilon_L - 1) + L}{L_{min} L} \right] L^{\epsilon_L - 1} dL$$

$$K^{\epsilon_L - 1} dK = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}{\delta(1 - \epsilon_C)} \right) \left[ \frac{\epsilon_L L - \epsilon_L L_{min} - L + L_{min} + L}{L_{min}} \right] L^{\epsilon_L - 1} \left( \frac{dL}{L} \right)$$

$$K^{\epsilon_L} \left( \frac{dK}{K} \right) = \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}{\delta(1 - \epsilon_C)} \right) \left[ \frac{\epsilon_L L + (1 - \epsilon_L) L_{min}}{L_{min}} \right] L^{\epsilon_L - 1} \left( \frac{dL}{L} \right) \quad (\text{B.8})$$

Como  $L \geq L_{min} > 0$  e  $K > 0$ , portanto a expressão entre colchetes deve ser positivo, dessa forma  $g'(K) > 0$ . A partir de (B.7) temos a seguinte possibilidade de combinação:  $(K, L) = (0, L_{min})$  ou  $(K, L) = (K_k, L_{max}) = (K_k, 1)$ . A partir de (B.4) o capital máximo,  $K_{max}$ , tem a seguinte magnitude:

$$\delta K = (1 - \omega_G)Y$$

$$\delta K = (1 - \omega_G)Z_0 L^{\epsilon_L} K^{1-\epsilon_L}$$

$$\delta K = (1 - \omega_G)Z_0 K^{1-\epsilon_L}$$

$$\delta K^{\epsilon_L} = (1 - \omega_G)Z_0$$

$$K = K_k = \left( \frac{(1 - \omega_G)Z_0}{\delta} \right)^{\frac{1}{\epsilon_L}} > 0 \quad (\text{B.9})$$

Portanto, temos duas raízes na linha CSE (B.7), representado pelos seguintes pontos:  $(K, L) = (0, L_{min})$  ou  $(K, L) = (K_k, L_{max}) = (K_k, 1)$ , esses pontos também representam soluções da equação (B.4). Usando a equação (B.1), encontramos os valores para consumo,  $C$ , exemplo  $(C, K, L) = (0, 0, L_{min})$  e  $(C, K, L) = (0, K_k, 1)$ , esses pontos representam soluções da linha CSE (B.7). Na Figura B.1 esses pontos são representados no espaço  $(C, K)$ .

A inclinação da linha CSE (B.7) é calculada da seguinte maneira. A linha CSE pode ser escrita como (B.2):

$$\delta K = (1 - \omega_G)Y - C$$

$$C = (1 - \omega_G)Y - \delta K$$

$$C = (1 - \omega_G)Z_0 L^{\epsilon_L} K^{1-\epsilon_L} - \delta K$$

$$C = (1 - \omega_G)Z_0 g(K)^{\epsilon_L} K^{1-\epsilon_L} - \delta K \quad (\text{B.10})$$

onde  $L = g(K)$  é a função implícita em (B.7). Ao derivar a equação (B.10) encontramos a inclinação da linha CSE (B.7):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dC}{dK}\right)_{\dot{K}=0} &= (1 - \omega_G)Z_0\epsilon_L g(K)^{\epsilon_L-1} g'(K)K^{1-\epsilon_L} + (1 - \omega_G)Z_0 g(K)^{\epsilon_L} (1 - \epsilon_L)K^{-\epsilon_L} - \delta \\
\left(\frac{dC}{dK}\right)_{\dot{K}=0} &= (1 - \omega_G)Z_0[\epsilon_L g(K)^{\epsilon_L-1} g'(K)K^{1-\epsilon_L} + g(K)^{\epsilon_L} (1 - \epsilon_L)K^{-\epsilon_L}] - \delta \\
\left(\frac{dC}{dK}\right)_{\dot{K}=0} &= (1 - \omega_G)Z_0 \left[ \epsilon_L g(K)^{-1} g'(K)K \left(\frac{g(K)}{K}\right)^{\epsilon_L} + (1 - \epsilon_L) \left(\frac{g(K)}{K}\right)^{\epsilon_L} \right] - \delta \\
\left(\frac{dC}{dK}\right)_{\dot{K}=0} &= (1 - \omega_G)Z_0 [\epsilon_L g(K)^{-1} g'(K)K + (1 - \epsilon_L)] \left(\frac{g(K)}{K}\right)^{\epsilon_L} - \delta \\
\left(\frac{dC}{dK}\right)_{\dot{K}=0} &= (1 - \omega_G)Z_0 \left[ 1 - \epsilon_L \left(1 - \frac{g'(K)K}{g(K)}\right) \right] \left(\frac{g(K)}{K}\right)^{\epsilon_L} - \delta \\
\left(\frac{dC}{dK}\right)_{\dot{K}=0} &= (1 - \omega_G)Z_0 [1 - \epsilon_L (1 - \eta_g(K))] \left(\frac{g(K)}{K}\right)^{\epsilon_L} - \delta \tag{B.11}
\end{aligned}$$

onde  $\eta_g(K)$  representa a elasticidade da função  $g(\cdot)$ .

$$\eta_g(K) \equiv \frac{g'(K)K}{g(K)} \tag{B.12}$$

A partir de (B.12), quando  $\eta_g(K) = 0$ , o termo em colchetes em (7.10) tende a  $(1 - \epsilon_L)$  à medida em que  $K \rightarrow 0$ . Mas deste que  $\lim_{K \rightarrow 0} \frac{g(K)}{K} = +\infty$ , segue que a linha CSE (B.7) é a vertical próxima a origem (Figura B.1).

O ponto que representa a regra Regra de Ouro (*Golden-Rule Point*), ponto A na Figura B.1, diz respeito ao máximo de consumo, e é obtido quando  $\frac{dC}{dK} = 0$  na equação (B.11).

$$(1 - \omega_G)Z_0 [1 - \epsilon_L (1 - \eta_g(K))] \left(\frac{g(K)}{K}\right)^{\epsilon_L} = \delta$$

sendo que  $g(K) = L$ , então temos:

$$(1 - \omega_G)Z_0[1 - \epsilon_L(1 - \eta_g(K))]\left(\frac{L}{K}\right)^{\epsilon_L} = \delta$$

$$(1 - \omega_G)Z_0[1 - \epsilon_L(1 - \eta_g(K))]Z_0L^{\epsilon_L}K^{-\epsilon_L} = \delta$$

$$(1 - \omega_G)Z_0[1 - \epsilon_L(1 - \eta_g(K))]Z_0L^{\epsilon_L}K^{-\epsilon_L}\frac{K}{K} = \delta$$

$$(1 - \omega_G)Z_0[1 - \epsilon_L(1 - \eta_g(K))]Z_0L^{\epsilon_L}K^{1-\epsilon_L}\frac{1}{K} = \delta$$

Sabendo que  $Y = Z_0L^{\epsilon_L}K^{1-\epsilon_L}$ , então:

$$(1 - \omega_G)[1 - \epsilon_L(1 - \eta_g(K))]\frac{Y}{K} = \delta$$

$$(1 - \omega_G)[1 - \epsilon_L(1 - \eta_g(K^{GR}))]\left(\frac{Y^{GR}}{K^{GR}}\right) = \delta \quad (\text{B.13})$$

onde  $Y^{GR}$  é dado a partir da função de produção (T1.8):

$$Y^{GR} = Z_0[gK^{GR}]^{\epsilon_L}[K^{GR}]^{1-\epsilon_L} \quad (\text{B.14})$$

A Regra de Ouro ocorre no ponto A da Figura B.1. Para os pontos a direita da regra de ouro, a linha CSE terá inclinação negativa, e isso implica que como a oferta de trabalho é exógena  $\eta_g(K) = 0$  para todo  $K$  e a partir de (B.13) chegamos na seguinte expressão:

$$1 - \omega_G(1 - \epsilon_L)\left(\frac{Y}{K}\right)^{GR} = \delta$$

A dinâmica do capital a partir de (T1.1) juntamente com (T1.6), (T1.8), e usando a função implícita  $L = g(K)$ , chegamos:



$$\dot{K} = I - \delta K \quad (\text{T1.1})$$

$$Y = C + I + G \quad (\text{T1.6})$$

$$Y = Z_0 L^{\epsilon_L} K^{1-\epsilon_L} \quad (\text{T1.8})$$

$$Y = C + I + \omega_G Y$$

$$(1 - \omega_G)Y = C + I$$

$$\dot{K} = (1 - \omega_G)Y - C - \delta K$$

$$\dot{K} = (1 - \omega_G)Z_0 g(K)^{\epsilon_L} K^{1-\epsilon_L} - \delta K - C \quad (\text{B.15})$$

onde teremos  $\frac{\partial \dot{K}}{\partial C} = -1 < 0$ , sinal  $(+, 0, -)$ , agora podemos determinar os sinais das regiões da esoclina  $\dot{K} = 0$ , no espaço  $(C, K)$ .

## Equilíbrio no Consumo

A linha do equilíbrio no consumo (CE) descreve as combinações de  $C$  e  $K$  na qual  $\dot{C} = 0$ . Usando (T1.2), (T1.5) e (T1.8), podemos escrever a linha CE como:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = r(t) - \rho \quad (\text{T1.2})$$

$$r(t) + \delta = (1 - \epsilon_L) \left( \frac{Y(t)}{L(t)} \right) \quad (\text{T1.5})$$

$$Y(t) = Z_0 L(t)^{\epsilon_L} K(t)^{1-\epsilon_L} \quad (\text{T1.8})$$

$$CE : \quad y \equiv \frac{Y}{K} = Z_0 \left( \frac{K}{L} \right)^{-\epsilon_L} = y^* \quad (\text{B.16})$$

onde a partir de (T1.2):

$$\frac{Y}{K} = \frac{r + \delta}{1 - \epsilon_L} = \frac{\rho + \delta}{1 - \epsilon_L} = y^*$$

onde  $y^*$  representa a razão produto capital no equilíbrio na qual a taxa de juros é igual a taxa de preferência temporal ( $r = \rho$ ).

A partir (B.16) que o consumo no equilíbrio é relacionado com uma única razão capital-trabalho como:

$$\left(\frac{K}{L}\right)^* \equiv \left(\frac{y^*}{Z_0}\right)^{\frac{-1}{\epsilon_L}}$$

$$\left(\frac{K}{L}\right)^* \equiv \left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{1}{\epsilon_L}}$$

Substituindo essa razão em (B.1) obtemos a expressão para a linha CE no plano  $(C, K)$ :

$$(1 - L)L^{\epsilon-1} = \left(\frac{1-\epsilon_C}{\epsilon_C \epsilon_L Z_0}\right) C K^{-(1-\epsilon_L)} \quad (7.1)$$

$$C = \left(\frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1-\epsilon_C}\right) \left(\frac{L}{K}\right)^{\epsilon_L-1} (1 - L) Z_0$$

$$C = \left(\frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1-\epsilon_C}\right) \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\epsilon_L} (1 - L) Z_0$$

$$C = \left(\frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1-\epsilon_C}\right) \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\epsilon_L} \left(1 - \left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{-1}{\epsilon_L}} K\right) Z_0$$

$$C = \left(\frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1-\epsilon_C}\right) \left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{1-\epsilon_L}{\epsilon_L}} \left(1 - \left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{-1}{\epsilon_L}} K\right) Z_0$$

$$C = \left(\frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1-\epsilon_C}\right) \left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{1-\epsilon_L}{\epsilon_L}} \left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{-1}{\epsilon_L}} K\right) Z_0$$

$$C = \left(\frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1-\epsilon_C}\right) \left(\left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{1}{\epsilon_L}} - K\right) y^*$$

$$C = y^* \left(\frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C}\right) \left(\left(\frac{Z_0}{y^*}\right)^{\frac{1}{\epsilon_L}} - K\right) \quad (B.17)$$

Segue de (B.17) que a linha CE é linear com inclinação negativa,  $\frac{\partial C}{\partial K} = -1 < 0$ , e passa pelas coordenadas  $(C, K) = (0, K_e)$  e  $(C, K) = (C_e, 0)$  na figura B.1.

$$K_c = \left( \frac{Z_0}{y^*} \right)^{\frac{1}{\epsilon_L}} \quad (\text{B.18})$$

$$C = y^* \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) \left( \frac{Z_0}{y^*} \right)^{\frac{1}{\epsilon_L}}$$

$$C = y^* \left( \frac{\epsilon_C \epsilon_L}{1 - \epsilon_C} \right) K_C \quad (\text{B.19})$$

Fornecido que  $\omega_G < \epsilon_L$ , podemos afirmar que a linha CE cruza a abcissa  $K$  à esquerda do intercepto  $K$  da curva CSE (*Capital Stock Equilibrium*). Podemos mostrar esse resultado relacionando  $K_C$  com a equação de  $K_K$  (B.9):

$$K_K = \left( \frac{(1 - \omega_C)Z_0}{\delta} \right)^{\frac{1}{\epsilon_L}}$$

$$K_K^{\epsilon_L} = \left( \frac{(1 - \omega_C)Z_0}{\delta} \right)$$

Assim temos:

$$\left( \frac{K_C}{K_K} \right)^{\epsilon_L} = \frac{Z_0 \left( \frac{1 - \epsilon_L}{\rho + \delta} \right)}{\left( \frac{(1 - \omega_C)Z_0}{\delta} \right)}$$

$$\left( \frac{K_C}{K_K} \right)^{\epsilon_L} = \left( \frac{\delta}{\rho + \delta} \right) \left( \frac{1 - \epsilon_L}{1 - \omega_G} \right) \quad (\text{B.20})$$

O termo em colchetes ao lado direito da equação está entre 0 e 1, pois  $\rho > 0$ . E como  $\omega_G < \epsilon_L$ , então  $K_C < K_K$ .

A dinâmica do consumo pode ser deduzida notando que a expressão (T1.2) pode ser reconstruída como:

$$\frac{\dot{C}}{C} = (1 - \epsilon_L)[y - y^*] \quad (\text{B.21})$$

onde  $y^*$  é definido pela expressão  $y^* \equiv \frac{\rho+\delta}{1-\epsilon_L} \equiv \frac{r+\delta}{1-\epsilon_L}$ . Pela equação (B.16) temos:

$$\frac{\partial y}{\partial C} = \epsilon_L Z_0 \left( \frac{K}{L} \right) \left( \frac{K}{L^2} \right) \left( \frac{\partial L}{\partial C} \right) < 0 \quad (\text{B.22})$$

onde (B.1) mostra que  $\frac{\partial L}{\partial C} < 0$ . Segue que  $\partial[\dot{C}/C]/\partial = (1 - \epsilon_L)\partial y/\partial C < 0$ . Essas expressões foram indicadas pelas flechas verticais na Figura B.1.